

MATEMÁTICAS

CUADERNO de EJERCICIOS

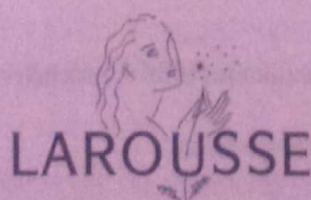
José Eulalia Arreguín Pérez



Matemáticas *cuaderno de* *ejercicios 3*

Secundaria tercer grado

José Eulalio Arreguín Pérez



Av. Diagonal 407 Bis-10
08008 Barcelona

Dinamarca 81
México, 06600 D.F.

21 Rue du Montparnasse
75298 París Cedex 06

Valentín Gómez 3530
1191 Buenos Aires

Presentación

Actualmente el estudio de las matemáticas en secundaria precisa que los alumnos y las alumnas, además de adquirir los conocimientos necesarios, ejerciten el razonamiento deductivo para que sean capaces de solucionar situaciones problemáticas de la vida real. Para lograrlo se requiere de la participación activa y entusiasta del docente como promotor del aprendizaje en los estudiantes, la ejercitación continua y suficiente de las técnicas y procedimientos matemáticos, así como la resolución de problemas de aplicación que relacionen el conocimiento promovido en el estudiante con situaciones posibles en el entorno.

Matemáticas cuaderno de ejercicios 3 es una herramienta muy útil que coadyuva al mejor desempeño de los alumnos, tanto en la escuela como fuera de ella, proporcionándole material que les permite ejercitar y adquirir habilidades y destrezas en la resolución de problemas y en la aplicación de los conocimientos en situaciones cotidianas.

En esta obra se puso especial cuidado en cumplir con la totalidad de los contenidos programáticos y su secuencia temática, así también se centró la atención en proponer ejercicios cuyo grado de dificultad aumenta de acuerdo con el avance en el desarrollo de los temas.

Una de las aportaciones sobresalientes de Matemáticas cuaderno de ejercicios 3 es la claridad en los procedimientos y los ejemplos resueltos en cada uno de los temas, lo cual sirve de guía a las alumnas y a los alumnos, adquiriendo mayor seguridad en la resolución de los ejercicios.

A lo largo de la obra se incluyen cinco evaluaciones bimestrales, las cuales tienen el propósito de recapitular lo aprendido, además de facilitar la labor docente.

Por lo anterior, Matemáticas cuaderno de ejercicios 3 cumple cabalmente con su objetivo fundamental: contribuir a reforzar y apoyar el aprendizaje de las matemáticas en tercer grado de secundaria.

Tabla de contenidos

BLOQUE I	Aritmética	
Raíz cuadrada		5
Errores de aproximación		6
		13
BLOQUE II	Álgebra	
Plano cartesiano		17
Operaciones con monomios y polinomios		18
Primera evaluación bimestral		24
Operaciones con fracciones algebraicas		35
Despeje y sustitución algebraicas		37
Ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales		43
Productos notables		45
Productos notables y factorización		55
Segunda evaluación bimestral		58
Ecuaciones de segundo grado		65
		67
BLOQUE III	Geometría	
Triángulos y cuadriláteros		75
Propiedades del triángulo		76
Círculo		77
Tercera evaluación bimestral		86
Semejanza		92
Semejanza de triángulos		94
Homotecias		98
Teorema de Pitágoras		100
Sólidos		104
Cuarta evaluación bimestral		107
		115
BLOQUE IV	Trigonometría	
Funciones trigonométricas		117
Sólidos		118
Resolución de ángulos rectángulos		122
Resolución de triángulos rectángulos		123
		124
BLOQUE V	Presentación y tratamiento de la información	
Tasas		127
Estadística descriptiva		128
		131
BLOQUE VI	Probabilidad	
Probabilidad		139
Quinta evaluación bimestral		140
		150
Bibliografía		152

BLOQUE I

Aritmética

Método babilónico

LECCIÓN

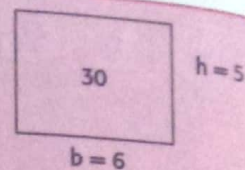
1

Aritmética

PROCEDIMIENTO:

Calcular la raíz cuadrada de 30 utilizando el método babilónico.

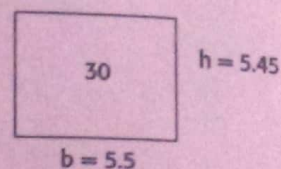
1. Se dibuja un rectángulo de cualquier medida, pero con área igual a 30.



2. Se obtiene el promedio de la base y la altura; $\frac{6+5}{2} = \frac{11}{2} = 5.5$
el resultado es la nueva base del rectángulo.

3. Se divide el área del rectángulo entre el promedio anterior; el resultado es la nueva altura del rectángulo.

$$\frac{30}{5.5} = 5.45$$



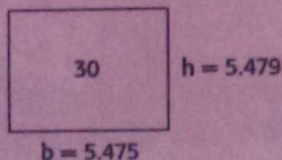
4. Se repite el proceso varias veces hasta aproximarnos a un cuadrado de lados iguales.

$$\text{Nueva base } \frac{5.5 + 5.45}{2} = \frac{10.95}{2} = 5.475$$

$$\frac{5.475 + 5.479}{2} = \frac{10.954}{2} = 5.477$$

$$\text{Nueva altura } \frac{30}{5.475} = 5.479$$

$$\frac{30}{5.477} = 5.4774$$



$$5.4770 < \sqrt{30} < 5.4774 \quad \text{Por tanto, } \sqrt{30} \approx 5.477$$

Calcula la raíz cuadrada de los siguientes números utilizando el método babilónico.

a) $\sqrt{25}$

b) $\sqrt{42}$

c) $\sqrt{56}$

d) $\sqrt{72}$

e) $\sqrt{96}$

Método de Newton

LECCIÓN

2

Aritmética

PROCEDIMIENTO:

Calcular la raíz cuadrada de 30 utilizando el método de Newton.

1. Se escoge un número que elevado al cuadrado se aproxime al radicando sin pasarse; por ejemplo, 5.
2. Se divide el radicando entre el número escogido: $\frac{30}{5} = 6$
3. Se obtiene el promedio de las dos cantidades anteriores y se repite $\frac{5+6}{2} = \frac{11}{2} = 5.5$ el proceso varias veces.

$$\frac{30}{5.5} = 5.4545$$

$$\frac{30}{5.4772} = 5.4772$$

$$\frac{5.5 + 5.4545}{2} = 5.4772$$

$$\frac{5.4772 + 5.4772}{2} = 5.4772$$

Una buena aproximación al resultado sería: $\sqrt{30} \approx 5.4772$

Calcula la raíz cuadrada de los siguientes números utilizando el método de Newton.

a) $\sqrt{7} =$

b) $\sqrt{70} =$

c) $\sqrt{105} =$

d) $\sqrt{18} =$

e) $\sqrt{92} =$

f) $\sqrt{125} =$

LECCIÓN

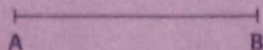
3

Método Gráfico

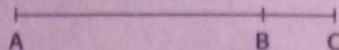
PROCEDIMIENTO:

Calcular la raíz cuadrada de 3 utilizando el método gráfico.

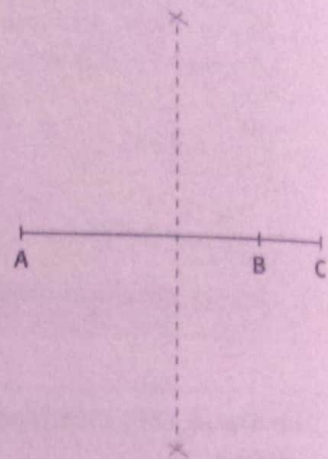
1. Se traza un segmento horizontal de la misma medida que el radicando.



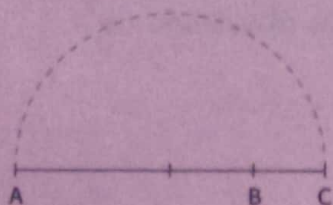
2. El segmento AB se prolonga una unidad más.



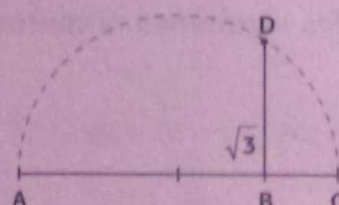
3. Se traza la mediatriz del segmento AC.



4. Apoyando el compás en el punto medio se traza una semicircunferencia.



5. Se traza una perpendicular en el punto B que corte a la semicircunferencia en el punto D.



6. La longitud del segmento BD es la raíz cuadrada del segmento AB. $\sqrt{3} \approx 1.7$

Calcula la raíz cuadrada de los siguientes números utilizando el método Gráfico:

a) $\sqrt{1} =$

b) $\sqrt{2} =$

c) $\sqrt{1.5} =$

d) $\sqrt{2.5} =$

Método por aproximación

LECCIÓN

4

PROCEDIMIENTO:

Calcular la raíz cuadrada de 30 por aproximación.

1. El número 30 se ubica entre 5 y 6 en la tabla de cuadrados: por tanto, se elevan al cuadrado:

$$(5.1)^2 = 26.01 \quad (5.2)^2 = 27.04 \quad (5.3)^2 = 28.09$$

$$(5.4)^2 = 29.16 \quad (5.5)^2 = 30.25$$

2. El número 30 se ubica entre 5.4 y 5.5, por lo que se elevan al cuadrado:

$$(5.41)^2 = 29.26 \quad (5.42)^2 = 29.37 \quad (5.43)^2 = 29.48 \quad (5.44)^2 = 29.59$$

$$(5.45)^2 = 29.70 \quad (5.46)^2 = 29.81 \quad (5.47)^2 = 29.92 \quad (5.48)^2 = 30.03$$

$$3. \quad 5.47 < \sqrt{30} < 5.48$$

Por tanto, una aproximación a centésimos sería: $\sqrt{30} \approx 5.47$

Tabla de cuadrados	
x	x ²
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100
11	121
12	144

Calcular la raíz cuadrada de los siguientes números utilizando el método por aproximación.

a) $\sqrt{5} =$

b) $\sqrt{18} =$

c) $\sqrt{24} =$

d) $\sqrt{50} =$

e) $\sqrt{90} =$

f) $\sqrt{125} =$

Aritmética

LECCIÓN

5

Aritmética

Algoritmo de la raíz cuadrada

PROCEDIMIENTO:

Calcular la raíz cuadrada de 625.

1. Se separa el radicando en parejas de números de derecha a izquierda.
2. Se busca el número que elevado al cuadrado se aproxime más, sin pasarse, a la primera pareja o número de la izquierda. Se anota en la línea correspondiente a la raíz.
3. Se resta el cuadrado del número y se baja la siguiente pareja de números.
4. El número resultante (menos el dígito de las unidades) se divide entre el doble de la raíz: $15 \div 2(3) = 2.5$
5. La parte entera del cociente se agrega a la raíz y al doble de la raíz.
6. Este último número se multiplica por el cociente: $62 \times 2 = 124$
7. El producto obtenido se resta.
8. Se baja la siguiente pareja de números y se repiten los pasos 4 y 5.
9. Si al terminar de bajar las parejas de números del radicando el residuo es diferente de cero, se anota el punto decimal en la raíz y se agregan tantas parejas de ceros como decimales se vayan a calcular.

$$\begin{array}{r} \sqrt{105625} \quad 325 \\ -9 \\ \hline 156 \\ -124 \\ \hline 3225 \\ -3225 \\ \hline 0 \end{array}$$

Radical
↓
Radical
Raíz
Residuo

Calcula la raíz cuadrada de los siguientes números utilizando el algoritmo anterior.

a) $\sqrt{25}$

b) $\sqrt{81}$

c) $\sqrt{848}$

d) $\sqrt{1296}$

e) $\sqrt{2809}$

f) $\sqrt{16129}$

g) $\sqrt{59049}$

h) $\sqrt{564001}$

i) $\sqrt{1234321}$

Temas relacionados: Cuadrados de números
Operaciones con números naturales

Algoritmo de la raíz cuadrada (continuación)

PROCEDIMIENTO:

Calcular la raíz cuadrada de 258.324, aproximando el resultado a centésimos.

Se usa el algoritmo anterior, cuidando que:

1. La parte entera del radicando se separe en parejas de números hacia la izquierda.
2. La parte decimal se separa en parejas de números hacia la derecha.

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{258.3240} \quad 16.07 \\
 \underline{-1} \quad 26 \\
 158 \quad 3207 \\
 \underline{-156} \\
 23240 \\
 \underline{-22449} \\
 791
 \end{array}$$

Calcula la raíz cuadrada de los siguientes números, aproximando el resultado a centésimos utilizando el algoritmo.

a) $\sqrt{253}$

b) $\sqrt{462}$

c) $\sqrt{2834}$

d) $\sqrt{42536}$

e) $\sqrt{9.7}$

f) $\sqrt{78.45}$

g) $\sqrt{581.728}$

h) $\sqrt{331.67}$

i) $\sqrt{7254.5261}$

LECCIÓN

5

Aritmética

LECCIÓN

5

Aritmética

Algoritmo de la raíz cuadrada (continuación)

1. Una persona desea cercar un terreno cuadrado de 625 m^2 de superficie. ¿Cuántos metros lineales de malla de acero tendrá que usar?
2. Se desea cubrir el piso de un cuarto con vitropiso de $30 \times 30 \text{ cm}$. Si la superficie del cuarto es de 9 m^2 , ¿cuántas piezas de vitropiso se necesitarán para cubrir el área del cuarto?
3. Si el territorio mexicano tuviera forma cuadrada y sabiendo que su superficie es de $1\,958\,201 \text{ km}^2$, ¿cuántos kilómetros mediría cada lado del cuadrado?
4. Para confeccionar 20 uniformes completos (pantalón y camisa) para igual número de jóvenes de un grupo de tercer grado de secundaria, se requieren 60 m^2 de tela. Si la tela tuviera forma cuadrada, ¿cuánto mediría cada lado? Si la tela tiene forma rectangular con 1.5 m de ancho, ¿cuánto debe medir de largo?

Fuentes de error en un cálculo

LECCIÓN

1

PROCEDIMIENTO:

Las fuentes de error en un cálculo pueden ser de:

- Entrada: Existe error en los datos proporcionados.
- Procedimiento: Para facilitar operaciones redondeamos cantidades.
- Salida: Redondeamos o truncamos el resultado.

Anota en el paréntesis de la izquierda la letra que corresponda, según el error que se está cometiendo en cada caso: E, si es error de entrada; P, si es error de procedimiento; y S, si es error de salida.

- () Al ir de compras, Margarita gastó \$3.50 en una lata de refresco, \$11.50 en una barra de pan, \$7.35 en un kilogramo de aguacate y \$5.90 en un kilogramo de tomate. Al acercarse a la caja registradora, ella sabía que tenía que pagar aproximadamente \$29.00.
- () Al pagar en la gasolinera con un billete de \$200.00, Juan recibió \$45.00 de cambio, aunque la bomba marcaba \$154.80.
- () El valor calculado para π es 3.1416.
- () Antonio mide 1.69 metros de altura.
- () Para calcular el equivalente de 20 dólares en pesos mexicanos, a razón de \$9.50 por dólar, Ana multiplicó $20 \times \$10.00 = \200.00 .
- () $\sqrt{2} = 1.4142$
- () El área de un cuarto cuadrado que mide 2 metros por lado es 4 m^2 .
- () Al comprar 15 metros de tela a \$19.00 por metro, Roxana calculó pagar \$300.00.
- () $\frac{4}{3} = 1.33$

Aritmética

Estimación y acotamiento de errores

LECCIÓN

2

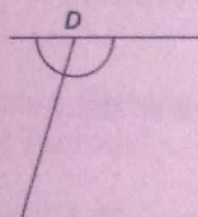
Aritmética

1. Error en una medición: Es la resta del valor exacto menos el valor aproximado. Si el error es positivo se trata de una aproximación por defecto; si es negativo, es una aproximación por exceso. $e = x - x'$
2. Error absoluto: Es el valor numérico del error de medición sin considerar el signo. $e_a = |x - x'|$
3. Error relativo: Es el cociente que resulta de dividir el error absoluto entre el valor exacto. $e_r = \frac{e_a}{x}$
4. Porcentaje de error: Es el producto del error relativo por cien. $P_e = e_r \times 100$

Ejemplo: El diámetro de un CD es de 12 cm. Si con un instrumento de medición más preciso se obtiene una lectura del diámetro del CD de 11.95 cm.

- ¿Cuál es el error en la medición? -0.05 cm
 ¿Cuál es el error absoluto? -0.05 cm
 ¿Cuál es el error relativo? -0.05 cm
 ¿Cuál es el porcentaje de error? -0.05 cm

$$\begin{aligned} e &= x - x' \\ e &= 11.95 \text{ cm} - 12 \text{ cm} \\ e &= -0.05 \text{ cm} \\ e_a &= |-0.05 \text{ cm}| \\ e_a &= -0.05 \text{ cm} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} P_e &= e_r \times 100 \\ P_e &= (0.0041)(100) \\ P_e &= 0.41\% \end{aligned}$$

En las siguientes cantidades numéricas que representan mediciones exactas y aproximadas, calcula el error, el error absoluto, el error relativo y el porcentaje de error.

a) $x' = 18$
 $x = 18.1$

b) $x = 2.33$
 $x' = 2.3$

Temas relacionados: Operaciones con números naturales
 Operaciones con números decimales

Estimación y acotamiento de errores (continuación)

En las siguientes cantidades numéricas, calcula el error absoluto, el error relativo y el porcentaje de error.

d) $x = 10.09$
 $x' = 10.1$

e) $x = 2.33$
 $x' = 2.3$

f) $x = 3.1416$
 $x' = 3.14159$

LECCIÓN

2

Aritmética

LECCIÓN

2

Álgebra

Estimación y acotamiento de errores (continuación)

1. Al tomar la lectura de la temperatura ambiental en un día frío, un termómetro digital marcó 8.2°C y un termómetro de mercurio marcó 8°C . Si se considera como exacta la lectura del termómetro digital, calcula el error absoluto, el error relativo y el porcentaje de error en las dos lecturas.
2. Al medir la longitud de un tornillo con una regla, se obtuvo que medía 2 cm. Al medir la misma pieza con un micrómetro, éste dio una lectura de 1.99 cm. Si se considera como exacta la medición del micrómetro, calcula el error absoluto, el error relativo y el porcentaje de error en las dos mediciones.
3. Al medir el grueso de un libro con una regla normal, resultó en 3 cm, y al medirlo con un Vernier dio como resultado 3.02 cm. Si se considera exacta la medición con Vernier, calcula el error absoluto, el error relativo y el porcentaje de error en las dos mediciones.
4. En una competencia de natación se midió el tiempo de un competidor con un cronómetro mecánico y otro digital. El primero resultó en 56.35 segundos. Si se considera exacta la medición, calcula el error absoluto, el error relativo y el porcentaje de error en las dos mediciones.

BLOQUE II

Álgebra

Funciones

LECCIÓN

1

PROCEDIMIENTO:

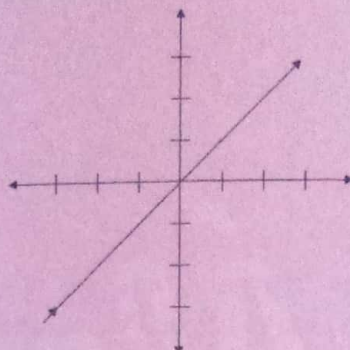
Una función es una regla de equivalencia donde cada valor de x (dominio) le corresponde sólo un valor de y (contradominio, imagen o rango).

x	y
-2	-1
-1	0
0	1
1	2
2	3

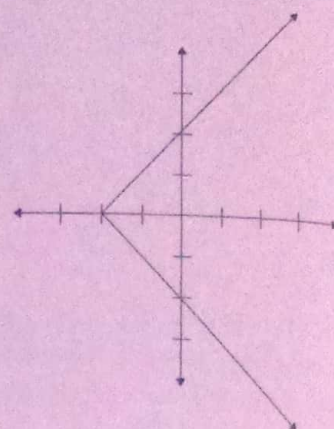
Sí es función

x	y
-2	-1
-1	0
0	0
1	1
1	2

No es función



Sí es función



No es función

Indica si se trata o no de una función.

a)

x	y
-2	1
-1	2
0	3
1	4
2	5

___ es función

b)

x	y
2	3
3	4
4	5
5	4
6	7

___ es función

c)

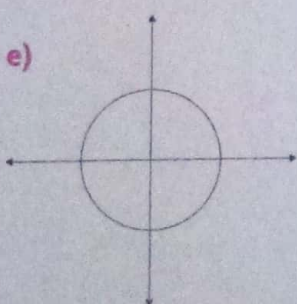
x	y
0	-3
1	-2
2	-1
3	0
4	1

___ es función

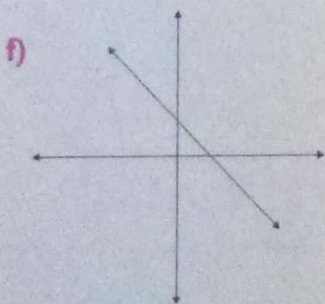
d)

x	y
3	-2
3	-1
3	0
3	1
3	2

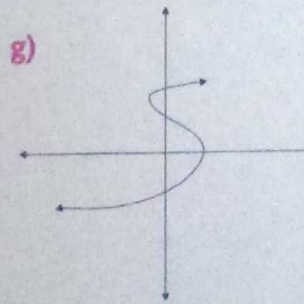
___ es función



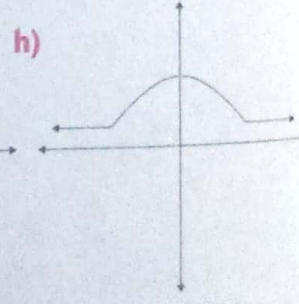
___ es función



___ es función



___ es función



___ es función

i)

(2, 5)	(3, 6)	(4, 7)
(5, 8)	(6, 9)	(7, 10)

___ es función

j)

(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)
(5, 1)	(6, 1)	(7, 1)

___ es función

k)

(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
(1, 5)	(1, 6)	(1, 7)

___ es función

l)

(-3, 1)	(-2, 2)	(-1, 3)
(0, 4)	(1, 5)	(2, 6)

___ es función

Temas relacionados: Coordenadas de un punto

Gráficas de funciones

LECCIÓN

2

Cálculos

$$y = x + 1$$

Si $x = -3$ $y = x + 1 = -3 + 1 = -2$

Si $x = -2$ $y = x + 1 = -2 + 1 = -1$

Si $x = -1$ $y = x + 1 = -1 + 1 = 0$

Si $x = 0$ $y = x + 1 = 0 + 1 = 1$

Si $x = 1$ $y = x + 1 = 1 + 1 = 2$

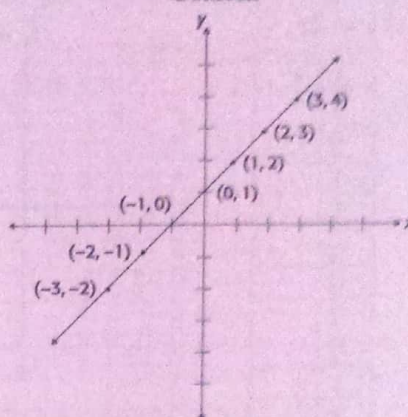
Si $x = 2$ $y = x + 1 = 2 + 1 = 3$

Si $x = 3$ $y = x + 1 = 3 + 1 = 4$

Tabla

x	y
-3	-2
-2	-1
-1	0
0	1
1	2
2	3
3	4

Gráfica



x es la variable independiente porque se le asignan valores arbitrarios.

y es la variable dependiente porque sus valores dependen del valor de x .

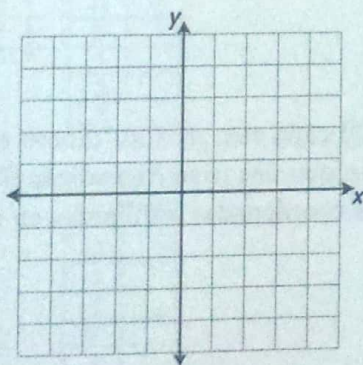
Identifica en cada función a la variable independiente y a la variable dependiente.

- | | | | | | |
|----------------------|------------------|----------------|----------------------------|------------------|----------------|
| | V. independiente | V. dependiente | | V. independiente | V. dependiente |
| a) $A = \pi r^2$ | _____ | _____ | b) $F = 3m$ | _____ | _____ |
| c) $P = 41$ | _____ | _____ | d) $y = x^2 + x + 1$ | _____ | _____ |
| e) $a = \frac{b}{2}$ | _____ | _____ | f) $y = \frac{x^2}{3} - 2$ | _____ | _____ |

Gráfica las siguientes funciones.

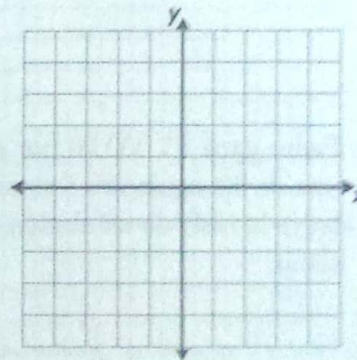
a) $y = x$

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



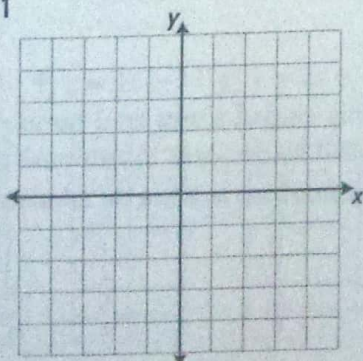
b) $y = x + 3$

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



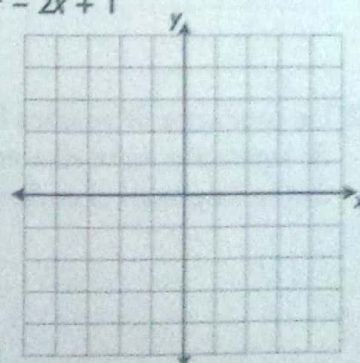
c) $y = 2x - 1$

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



d) $y = x^2 - 2x + 1$

x	y
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	



Álgebra

Gráficas de funciones (continuación)

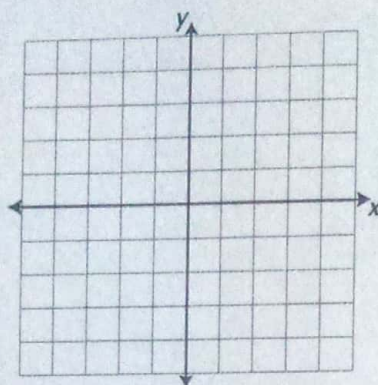
LECCIÓN

2

Grafica las siguientes funciones.

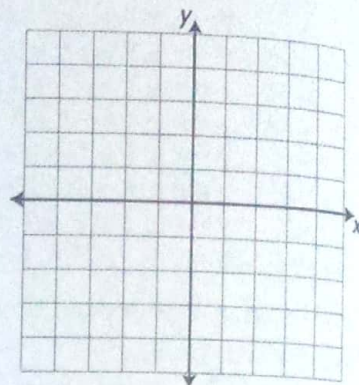
a) $y = 2x$

x	y
$-\frac{3}{2}$	
$-\frac{1}{2}$	
0	
$\frac{1}{2}$	
1	
$\frac{3}{2}$	



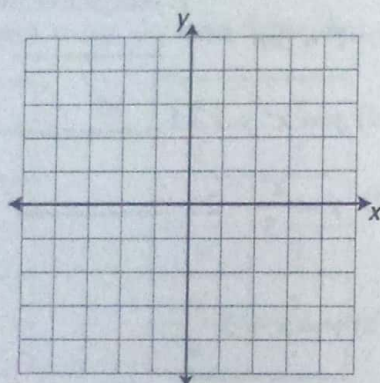
b) $y = \frac{1}{x}$

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



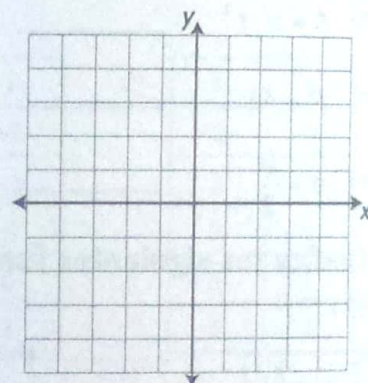
c) $y = (x+1)^2$

x	y
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	



d) $y = (x-1)^2$ (Compara con el problema del inciso d del ejercicio anterior.)

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



- Pedro gana \$1 000.00 por semana. Si ahorra \$200.00 cada vez, ¿cuánto dinero tendrá en cada una de las siguientes 5 semanas? Expresa una función que nos permita realizar el cálculo, construye la tabla de tabulación de la función y grafica las coordenadas resultantes en el plano cartesiano.
- Un conductor de autobús foráneo realiza el viaje de una ciudad a otra en 2 horas. Si la distancia de separación entre ellas es de 180 km, ¿a qué velocidad se desplaza el autobús? ¿A qué velocidad se desplazará si tarda 3, 4, 5 o 6 horas? Escribe la función, la tabla de tabulación y gráfica.

Familias de gráficas de la forma $y = mx + b$

LECCIÓN

3

Completa las siguientes tablas y grafica los puntos resultantes en el mismo plano cartesiano. Utiliza colores diferentes para cada gráfica.

I. Modificando el valor de m

a) $y = -3x$

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

b) $y = -2x$

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

c) $y = -x$

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

d) $y = x$

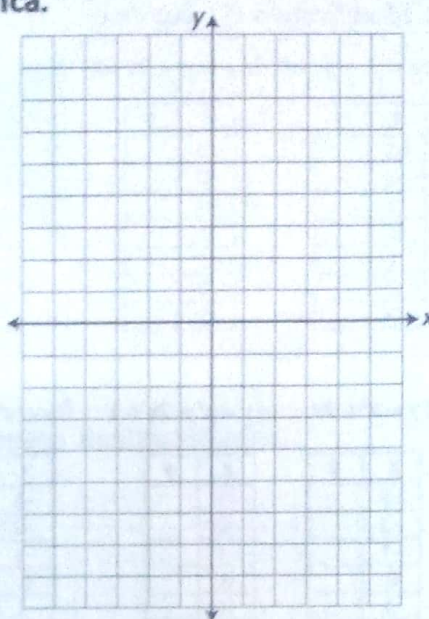
x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

e) $y = 2x$

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

f) $y = 3x$

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



a) $y = 2x - 3$

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

b) $y = 2x - 2$

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

c) $y = 2x - 1$

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

d) $y = 2x$

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

e) $y = 2x + 1$

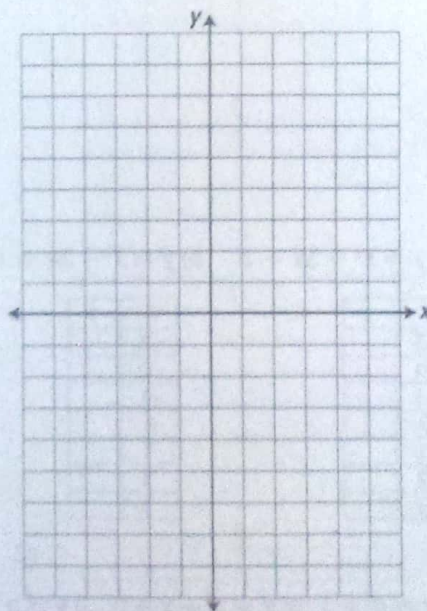
x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

f) $y = 2x + 2$

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

g) $y = 2x + 3$

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



Álgebra

LECCIÓN

4

Álgebra

Familias de gráficas de la forma $y = ax^2 + bx + c$ ($a = 1$)

Completa las siguientes tablas y grafica los puntos resultantes en el mismo plano cartesiano. Utiliza colores diferentes para cada gráfica.

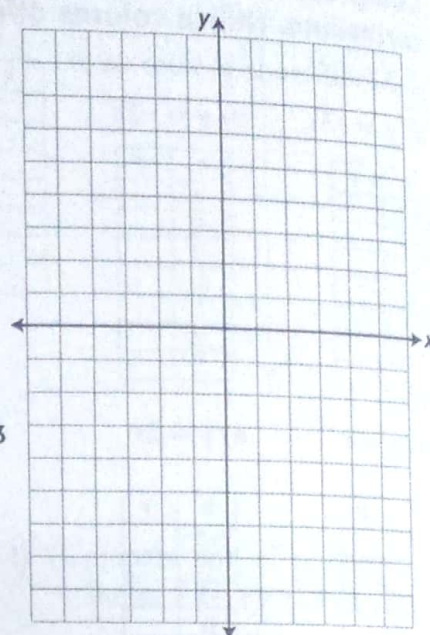
I. Modificando el valor de c

a) $y = x^2 + 3x - 3$ b) $y = x^2 + 2x - 2$ c) $y = x^2 + 2x - 1$

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



d) $y = x^2 + 2x$ e) $y = x^2 + 2x + 1$ f) $y = x^2 + 2x + 2$ g) $y = x^2 + 2x + 3$

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

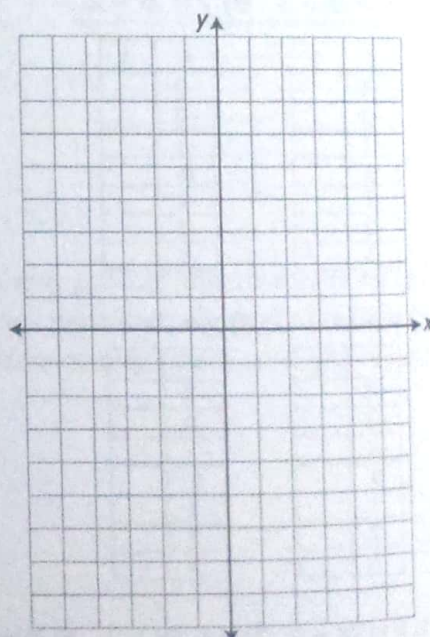
II. Modificando el valor de b

a) $y = x^2 - 3x + 1$ b) $y = x^2 - 2x + 1$ c) $y = x^2 - x + 1$

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



d) $y = x^2 + 1$ e) $y = x^2 + x + 1$ f) $y = x^2 + 2x + 1$ g) $y = x^2 + 3x + 1$

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

Gráfica de ecuaciones y desigualdades lineales

LECCIÓN

5

PROCEDIMIENTO:

Colocar la región de puntos que satisfacen la desigualdad $x + y > 2$

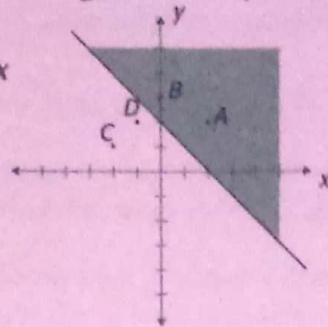
1. Se establece la ecuación $x + y = 2$

2. Se despeja y

$$y = 2 - x$$

3. Se grafica la ecuación

x	y
-2	4
-1	3
0	2
1	1
2	0



$$A(2, 2) \quad 2 + 2 > 2 \quad V$$

$$B(0, 3) \quad 0 + 3 > 2 \quad V$$

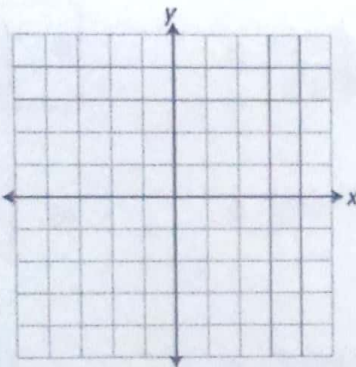
$$C(-2, 1) \quad -2 + 1 > 2 \quad F$$

$$D(-1, 2) \quad -1 + 2 > 2 \quad F$$

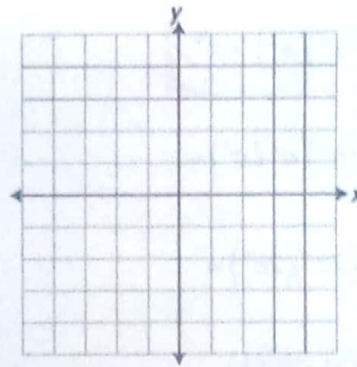
4. Se sustituyen puntos de ambos lados de la recta para evaluar la desigualdad.

Colorea la región cuyos puntos satisfacen las siguientes desigualdades.

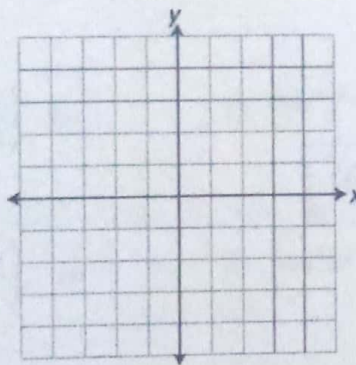
a) $y > x + 3$



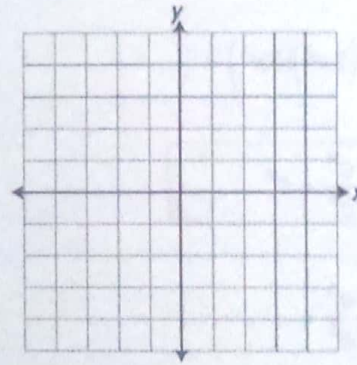
b) $y - 2x < 5$



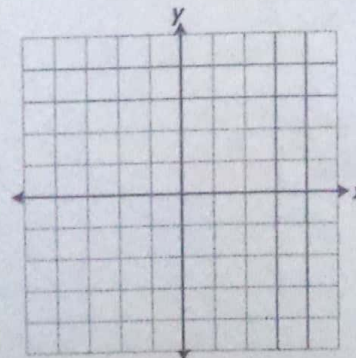
c) $3x + 5y > 1$



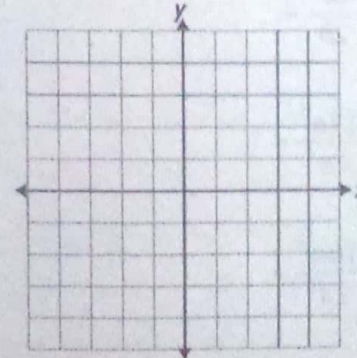
d) $y < x$



e) $y > 4$



f) $y > \frac{2x}{3}$



Álgebra

LECCIÓN

1

Leyes de los exponentes

1. Cuando se multiplican dos potencias de la misma base, los exponentes se suman. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. Cuando se dividen dos potencias de la misma base, los exponentes se restan. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3. Cuando una potencia se eleva a otra potencia, los exponentes se multiplican. $(a^x)^y = a^{xy}$
4. El producto de dos o más factores elevados a una misma potencia es igual al producto de los factores elevados, cada uno, al exponente del producto. $(ab)^x = a^x b^x$
5. El cociente elevado a una potencia es igual a dividir el numerador elevado a la potencia entre el denominador elevado a la misma potencia. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

Realiza las operaciones indicadas aplicando las leyes de los exponentes.

a) $(x^2)(x^3) = x^5$

k) $(a^2)^3 = a^6$

t) $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^2 = \frac{a^4}{b^6}$

b) $(a^3)(a^4)(a^2) =$

l) $(b^4)^2 =$

u) $\left(\frac{x^4}{y^3}\right)^3 =$

c) $(2a^2)(2a^5) =$

m) $(c^5)^3 =$

v) $\left(\frac{c^3}{d^5}\right)^4 =$

d) $(3b^3)(2b^6) =$

n) $(2a^3)^4 =$

w) $\left(\frac{a^2}{b^5}\right)^2 =$

e) $(2x^2)(3x^3) =$

ñ) $(3a)^2 =$

x) $\left(\frac{a^2b^3}{c^2}\right)^5 =$

f) $\frac{c^8}{c^5} = c^3$

o) $(a^2b^3)^2 = a^4b^6$

g) $\frac{a^5}{a^2} =$

p) $(4a^2b^3)^3 =$

h) $\frac{4b^2}{2b} =$

q) $(2a^2b^2c^2) =$

i) $\frac{12a^7}{4a^4} =$

r) $(x^3y^5z)^5 =$

j) $\frac{10x^5}{2x^3} =$

s) $(3a^4b^3)^4 =$

Temas relacionados: Multiplicación y división algebraicas
Potenciación

Leyes de los exponentes (continuación)

Relaciona las dos columnas anotando en el paréntesis de la izquierda la letra que corresponda a la respuesta correcta.

() $2bc$

a) $(3a^3)(2a^{-4})(5a^2) =$

() $81a^6$

b) $(7a^2b^{-1})(3ab^3) =$

() $64a^{12}b^6$

c) $\frac{a^2b^3}{ab} =$

() $9a^4b^{10}c^2$

d) $\frac{2a^2b^3c}{a^2b^2} =$

() $30a$

e) $(a^2b^{-3})^5 =$

() $27a^3b^6c^9$

f) $(3a^2b^3c)^2 =$

() $\frac{16a^8b^{10}}{4}$

g) $(9a^3)^2 =$

() $a^{10}b^{-15}$

h) $(4a^4b^2)^3 =$

() $21a^3b^2$

i) $\left(\frac{4^{-1}a^{-4}b^{-5}}{c^{-2}}\right)^{-2} =$

() ab^2

j) $\left(\frac{9a^2b^3c^4}{3abc}\right)^3 =$

LECCIÓN

1

Álgebra

Suma algebraica

LECCIÓN

2

1. Sólo pueden sumarse términos semejantes.
2. Términos con signos iguales se suman; términos con signos diferentes se restan.
3. El signo en el resultado es el signo de la cantidad mayor.
4. Las literales y los exponentes no se modifican.

$$5a + 3b + 4a + 5b = 9a + 8b$$

$$\begin{array}{r} 3a + 2b - 4c \\ + 2a - 3b + 4c \\ \hline 5a + 4b + 5c \\ 10a + 3b + 5c \end{array}$$

Resuelve las siguientes operaciones y compara tu resultado con los que se muestran en cada problema. Anota en el paréntesis de la izquierda la letra que corresponda a la respuesta correcta.

$$() 5a + 3a + 2a =$$

a) $30a$

b) $10a$

c) $10a^3$

d) $30a^3$

$$() 8a + 5a - 7a + 2a =$$

a) $8a$

b) $8a^4$

c) $-560a$

d) $-560a^4$

$$() 9a - 2a - 5a =$$

a) $2a^3$

b) $90a^3$

c) $90a$

d) $2a$

$$() 7a + 5a + 2b + 4b =$$

a) $18ab$

b) $12a^2 + 6b^2$

c) $12a + 6b$

d) $72ab$

$$() 4a - 3a - 5b + 6a + 7b =$$

a) $7a + 2b$

b) $7a^3 + 2b^2$

c) $13a + 12b$

d) $9ab$

Relaciona las dos columnas colocando en el paréntesis de la izquierda la letra que corresponda a la respuesta correcta.

$$() 7a + 3a - 5a =$$

a) $2a + 5b$

$$() 4a - 5a + 2a =$$

b) $5a - b + 7c$

$$() 7a + 3b - 5a + 2b =$$

c) $2a^3 + 5a^2 + 12a$

$$() 8a + 2b - 5b + 6a =$$

d) $3a - b + 3c - 3d$

$$() 4a + 3c - 2b + 5a + 7b - 8c =$$

e) $5a$

$$() 2a + 3a - 5b + 4b + 7c =$$

f) $3a^3 + 5a^2$

$$() 10a - 5b + 8c + 3d - 7a + 4b - 5c - 6d =$$

g) $9a + 5b - 5c$

$$() 7a^2 + 3a^3 - 2a^2 =$$

h) a

$$() 6a^3 + 3a^2 + 7a - 4a^3 + 2a^2 + 5a =$$

i) $14a - 3b$

Temas relacionados: Revisión de suma y resta de números con signo, Simplificación de expresiones algebraicas, Operaciones con números naturales

Suma algebraica (continuación)

Resuelve las siguientes sumas algebraicas correctamente. Compara tus resultados con los que se muestran al final del ejercicio.

$$\begin{array}{r} 1. \quad 8a + 3b \\ \quad 2a + 5b \\ \hline 10a + 8b \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2. \quad 4a + 7b - 5c \\ \quad 6a + 3b + 8c \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3. \quad 2a - 7b + 4c \\ \quad 5a + 3b - 5c \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4. \quad 18a + 13b \\ \quad -20a - 5b \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5. \quad 6a + 3b - 2c \\ \quad -4a + 5b + 6c \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6. \quad 9a - 11b + 5c + 8d \\ \quad a + 8b - 7c - 2d \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7. \quad 14a + 5b \\ \quad -7a + 2b + 5c \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8. \quad 2a + 3b - 5c \\ \quad 4a + 2b + 3c \\ \quad a + b + 5c \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9. \quad 3a + 5b - 2c \\ \quad -a + 2b + 5c \\ \quad 6a - 3b + 2c \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10. \quad 4a + 5b + 2c \\ \quad 3a - 7b + 2c + 4d \\ \quad -6a + 5b + c + 2d \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11. \quad -8a + 3b + 5c \\ \quad 5a + 4b + 3c \\ \quad 2a - 7b + 2c \\ \quad 3a + 2b - 4c \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12. \quad 6a + 3b - 5c + 2d \\ \quad -9a + 2b + 8c + 6d \\ \quad 4a - 8b - 2c - 3d \\ \quad -2a - 2b + 3c - d \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13. \quad 4a + 5b + \quad 2d \\ \quad 2a + \quad + 3c + \quad d \\ \quad \quad 5b + 4c + 3d \\ \quad 5a + 3b + 2c \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14. \quad 6a^2 + 3a - 5 \\ \quad 7a^2 - 6a + 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15. \quad 8a^2 + 7a - 3 \\ \quad -9a^2 + 5a + 2 \\ \quad 3a^2 - 9a + 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16. \quad 2a^2 + 3a + 2 \\ \quad 3a^2 + 5a - 3 \\ \quad -a^2 + 2a - 4 \\ \quad -4a^2 + a + 2 \\ \hline \end{array}$$

RESPUESTAS:

	$2a + 2b + 6c$	$10a + 10b + 3c$
$11a + 13b + 9c + 6d$	$8a + 4b + 5c$	$-a - 5b + 4c + 4d$
$7a + 6b + 3c$	$10a - 3b - 2c + 6d$	$a + 3b + 5c + 6d$
$7a + 7b + 5c$	$-2a + 8b$	$2a + 8b + 4c$
$13a^2 - 3a - 3$	$2a^2 + 3a + 1$	$7a - 4b - c$
		$11a - 3$

LECCIÓN

3

Resta algebraica

PROCEDIMIENTO:

1. Se cambian los signos de la expresión algebraica que se va a restar.

$$(2a + 3b + 5c) - (4a + 2b - 3c) = 2a + 3b + 5c - 4a - 2b + 3c = -2a + b + 8c$$

2. Se aplican las mismas reglas que en la suma algebraica.

$$\begin{array}{r} 6a + 7b - 3c \\ - 2a + 5b - 2c \\ \hline 4a + 2b - c \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 6a + 7b - 3c \\ - 2a - 5b + 2c \\ \hline 4a + 2b - c \end{array}$$

Resuelve las siguientes operaciones y compara tu resultado con los que se muestran en cada problema. Anota en el paréntesis de la izquierda la letra que corresponde a la respuesta correcta.

$$() (6a + 3b + 5d) - (4a + 2b - 5c + 2d) =$$

- a) $2a + 5b - 5c + 7d$ b) $10a + 5b - 5c + 7d$ c) $2a + b + 5c + 3d$ d) $2a + b - 5c + 3d$

$$() (4x + 3y - 5z) - (2x - 2y - 3z) =$$

- a) $2x + y - 8z$ b) $2x + 5y - 2z$ c) $2x - y + 8z$ d) $6x + y - 8z$

$$() (3m + 2n - 5p + 4) - (m + 3n - 2p + 5) =$$

- a) $4m + 5n - 7p + 9$ b) $2m + 5n - 7p + 9$ c) $-2m - n - 3p - 1$ d) $-2m - n - 3p - 1$

$$() (5a + 7b - 4c - 2d) - (-3a + 2b - 6c + d) =$$

- a) $8a + 5b + 2c - 3d$ b) $8a + 9b - 10c - d$ c) $2a + 9b - 6c - d$ d) $2a - 5b - 2c - d$

Resta la segunda expresión algebraica de la primera. No olvides cambiar signos. Compara tus resultados con los que se muestran al final del ejercicio.

$$\begin{array}{r} a) \quad 2a + 3b + 4c \\ \quad -4a + 2b + c \\ \hline \quad -2a + 5b + 5c \end{array}$$

$$\begin{array}{r} b) \quad 3a - 5b + 2c \\ \quad 2a - 3b + 5c \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} c) \quad 3a + 4b - 5c \\ \quad 7a + 5b - 2c \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} d) \quad 6a + 11b + 9c \\ \quad 2a + 7b + 5c \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} e) \quad 9a + 7b - 5c - 3d \\ \quad 8a + 5b + 3c + 2d \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} f) \quad 11a - 2b + 3c + 2d \\ \quad 7a - 3b - 2c + 5d \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} g) \quad 4a + 5b + 8c \\ \quad -2a + 3b + 5c \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} h) \quad 4a - 5b + 2c \\ \quad -3a + 2b - 3c \\ \hline \end{array}$$

RESPUESTAS:

$$5a - 8b + 7c$$

$$10a + 9b - 7c$$

$$8a + 18b + 14c$$

$$17a + 12b - 2c - d$$

$$18a - 5b + c + 7d$$

$$a - 3b - c$$

$$2a + 8b + 13c$$

Temas relacionados: Suma y resta de números con signo, Simplificación de expresiones algebraicas, Operaciones con números naturales

Multiplicación algebraica

LECCIÓN

4

Álgebra

1. Los exponentes con igual base se suman y los coeficientes se multiplican.

$$(4a)(5a^2) = (4)(5)a^{1+2} = 20a^3$$

$$2a(3a^2 + 5a + 3) = (2a)(3a^2) + (2a)(5a) + (2a)(3) = 6a^3 + 10a^2 + 6a$$

2.- Regla de los signos para la multiplicación.

$$\begin{pmatrix} + \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + \end{pmatrix} = +$$

$$\begin{pmatrix} + \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - \end{pmatrix} = -$$

$$\begin{pmatrix} - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + \end{pmatrix} = -$$

$$\begin{pmatrix} - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - \end{pmatrix} = +$$

I. Multiplicación de monomio por monomio.

Resuelve las siguientes multiplicaciones.

a) $(2a)(3a) = 6a^2$

b) $(5x)(3x) =$

c) $(2x^2)(5x^3) =$

d) $(6a^2b)(3ab^2) =$

e) $(7a^2)(3a^3)(-2a) =$

f) $(-4a^3x)(-3a^2x^2) =$

g) $(-6ab^2c)(2ab) =$

h) $\left(\frac{2}{3}a\right)\left(\frac{5}{6}a^2\right) =$

i) $(2a^2b)\left(\frac{3}{4}ab^2\right) =$

j) $\left(\frac{2}{7}a^2b^2\right)(5ab^3)\left(\frac{4}{5}a^2b\right) =$

k) $\left(\frac{3}{5}a^3\right)\left(\frac{4}{9}a^2b\right) =$

l) $(6a^2b^{-3})(-2ab^3) =$

LECCIÓN

4

Álgebra

Multiplicación algebraica (continuación)

II. Multiplicación de monomio por polinomio

Relaciona las dos columnas anotando en el paréntesis de la izquierda la letra que corresponda a la respuesta correcta.

$$(f) a(2a^2 + 3a + 1) =$$

$$a) 2a^2b^2 + ab$$

$$() a^2(5a + 2b + 3c) =$$

$$b) 6yz + 12x^2y^2z - 9xyz^2$$

$$() ab(2ab + 1) =$$

$$c) 2\frac{2x^4}{5} + 1\frac{3x^3}{5} - 4x^2 + 8x$$

$$() 3ab(4a^2 + 2a - 5) =$$

$$d) 14ab - 28a^2b + 21a^3b$$

$$() 5(2a + 3) =$$

$$e) 12a^6b^3 - 6a^5b^3 + 4a^4b^4$$

$$() 3xyz\left(\frac{2}{x} + 4xy - 3z\right) =$$

$$f) 2a^3 + 3a^2 + a$$

$$() \frac{4x}{5}(3x^3 + 2x^2 - 5x + 10) =$$

$$g) -32a^2 - 24ab + 16ac$$

$$() 2a^3b^2(6a^3b - 3a^2b + 2ab^2) =$$

$$h) 10a + 15$$

$$() -8a(4a + 3b - 2c) =$$

$$i) 5a^3 + 2a^2b + 3a^2c$$

$$() 7ab(2 - 4a + 3a^2) =$$

$$j) 12a^3b + 6a^2b - 15ab$$

Multiplicación algebraica (continuación)

Multiplicación de polinomio por polinomio.

$$\begin{aligned}
 (2a + 3b)(4a + 5b) &= (2a)(4a) + (2a)(5b) + (3b)(4a) + (3b)(5b) \\
 &= 8a^2 + 10ab + 12ab + 15b^2 \\
 &= 8a^2 + 22ab + 15b^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 2a + 3b \\
 \times 4a + 5b \\
 \hline
 8a^2 + 12ab \\
 10ab + 15b^2 \\
 \hline
 8a^2 + 22ab + 15b^2
 \end{array}$$

Nota: Es posible multiplicar de derecha a izquierda, como en aritmética, o de izquierda a derecha para mantener el orden de los términos.

Encuentra los productos indicados.

- a) $(5a + 3b)(2a + 7b) =$
 b) $(6a + 5b)(3a + 2b) =$
 c) $(3a + 2b + 5c)(4a + 3b + 2c) =$
 d) $(a - 3)(2a^3 + 3a^2 - 7a + 5) =$
 e) $(6a^2 + 3a + 2)(7a^2 - 5a + 8) =$

Realiza las siguientes multiplicaciones y compara los productos obtenidos con los resultados propuestos al final del ejercicio.

a) $\begin{array}{r} 4a + 7b \\ \underline{2a + 3b} \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 8a + 5b \\ \underline{3a + 4b} \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 7a^2 + 2ab + 5b^2 \\ \underline{5a - 2b} \end{array}$ d) $\begin{array}{r} 8a^2 + 7ab - 9b^2 \\ \underline{3a - 5b} \end{array}$ e) $\begin{array}{r} 4a^2 + 3a + 2 \\ \underline{6a + 5} \end{array}$

f) $\begin{array}{r} 3a^2 - 5ab + 2b^2 \\ \underline{4a^2 + 3ab - 7b^2} \end{array}$ g) $\begin{array}{r} 11a^2 + 3ab + 10b^2 \\ \underline{7a^2 - 8ab + b^2} \end{array}$ h) $\begin{array}{r} 9a^3 + 3a^2b - 7ab^2 + 5b^3 \\ \underline{3a + 2b} \end{array}$ i) $\begin{array}{r} 4a^3 - 6a^2b + 7ab^2 - 8b^3 \\ \underline{2a^2 - 3ab + 6b^2} \end{array}$

RESPUESTAS:

$$77a^4 - 67a^3b + 57a^2b^2 - 77ab^3 + 10b^4$$

$$24a^2 + 47ab + 20b^2$$

$$24a^3 + 38a^2 + 27a + 10$$

$$8a^5 - 24a^4b + 56a^3b^2 - 73a^2b^3 + 66ab^4 - 48b^5$$

$$8a^2 + 26ab + 21b^2$$

$$27a^4 + 27a^3b - 15a^2b^2 + ab^3 + 10b^4$$

$$12a^4 - 11a^3b - 28a^2b^2 + 41ab^3 - 14b^4$$

$$35a^3 - 4a^2b + 21ab^2 - 10b^3$$

$$24a^3 - 19a^2b - 62ab^2 + 45b^3$$

LECCIÓN

4

Álgebra

LECCIÓN

5

División algebraica

Para realizar divisiones algebraicas es necesario tomar en cuenta que:

1. Los coeficientes se dividen.
2. Los exponentes se restan; el exponente resultante se anota en donde esté el exponente mayor.
3. Regla de los signos.

$$\begin{aligned} (+) + (+) &= + \\ (+) + (-) &= - \\ (-) + (+) &= - \\ (-) + (-) &= + \end{aligned}$$

Efectúa las divisiones indicadas.

a) $\frac{6a^2}{3a} = \frac{6}{3}a^{2-1} = 2a$

b) $\frac{10a^2b^3}{5ab} =$

c) $\frac{-16a^3b^4c}{4a^2b^2} =$

d) $\frac{-5a^2b}{-10ab} =$

e) $\frac{4a^4b^3}{-12a^2b} =$

f) $\frac{5ab^2}{7a^3b} =$

g) $\frac{3a^4b^3c}{4a^2b^3c^2} =$

h) $\frac{-22x^2y^3}{-11x^3y^2} =$

i) $\frac{44x^3y^2z}{33xy^4z} =$

j) $\frac{36a^4b^3cd^2}{18a^4bc^3d^2} =$

División algebraica (continuación)

Encuentra el cociente de las siguientes expresiones algebraicas.

$$\text{a) } \frac{8a^3b + 6a^2b^2}{2a^2b} = \frac{8a^3b}{2a^2b} + \frac{6a^2b^2}{2a^2b} = 4a + 3b$$

$$\text{b) } \frac{12x^2y - 3x^2y^3}{3x^2y} =$$

$$\text{c) } \frac{8a^4b^2 + 6a^3b^3 - 4a^2b^3}{2a^2b^2} =$$

$$\text{d) } \frac{20a^3b^4 + 30a^5b^7c^4}{-10a^3b^4} =$$

$$\text{e) } \frac{-48a^4b^3 + 54a^2b^4}{16a^2b^2} =$$

$$\text{f) } \frac{8x^4y^4z - 32x^3y^3z^2}{16x^5y^2z} =$$

$$\text{g) } \frac{-x^5y^4z^3 - x^6y^3z^2}{-x^7y^6z} =$$

$$\text{h) } \frac{x^3y^2z + xy}{x^2yz} =$$

LECCIÓN

5

Álgebra

LECCIÓN

5

División algebraica (continuación)

PROCEDIMIENTO:

1. El dividendo y el divisor se acomodan de mayor a menor exponente. Si falta alguno se deja el espacio en blanco.
2. Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor.
3. El cociente obtenido se multiplica por todo el divisor.
4. El producto resultante se resta del dividendo (no olvides cambiar los signos de la expresión que se resta).
5. Se baja el siguiente término para formar el nuevo dividendo.
6. Se repiten los pasos 2, 3, 4 y 5.
7. La división termina cuando el exponente del dividendo es menor que el exponente del divisor.
8. Si hubiese residuo, el resultado se escribirá:

$$\text{Cociente} + \frac{\text{residuo}}{\text{divisor}}$$

Cociente
Divisor $\overline{)$ Dividendo
Residuo

$$\begin{array}{r} a^3 + 4a^2 + 7a + 6 \\ a + 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^2 + 2a + 3 \\ a + 2 \overline{) a^3 + 4a^2 + 7a + 6} \\ \underline{-a^3 - 2a^2} \\ 2a^2 + 7a \\ \underline{-2a^2 - 4a} \\ 3a + 6 \\ \underline{-3a - 6} \\ 0 \end{array}$$

Encuentra el cociente de las siguientes expresiones matemáticas. Compara tus resultados con las opciones mostradas en cada ejercicio y anota en el paréntesis de la izquierda la letra que corresponda.

$$\left(\quad \right) \frac{a^2 + 5a + 6}{a + 3} =$$

- a) $a + 3$
b) $a + 2$
c) $a + 8 + \frac{30}{a + 3}$

$$\left(\quad \right) \frac{a^2 + 9a + 20}{a + 4} =$$

- a) $a + 5$
b) $a + 13$
c) $a + 13 + \frac{72}{a + 4}$

$$\left(\quad \right) \frac{a^2 + a - 2}{a + 1} =$$

- a) $a + \frac{2}{a - 1}$
b) $a + 2 + \frac{2}{a - 1}$
c) $a + 2$

$$\left(\quad \right) \frac{a^3 + 7a^2 + 13a + 15}{a + 5} =$$

- a) $a^2 + 2a + 3$
b) $a^2 + 12a + 73$
c) $a^2 + 12a + 73 + \frac{380}{a + 5}$

$$\left(\quad \right) \frac{12a^3 + 19a^2 - a - 15}{4a - 3} =$$

- a) $3a^2 + 2a - 2 - \frac{9}{4a - 3}$
b) $3a^2 + 2a - 2$
c) $3a^2 + 7a + 5$

$$\left(\quad \right) \frac{16a^3 + 24a^2b + 29ab^2 + 15b^3}{4a^2 + 3ab + 5b^2} =$$

- a) $4a + 9b + \frac{76ab^2 + 60b^3}{4a^2 + 3ab + 5b^2}$
b) $4a + 3b$
c) $4a + 9b$

Temas relacionados: Operaciones con números naturales, Suma, resta y multiplicación algebraicas, Leyes de los exponentes

I. Utilizando el algoritmo, calcula la raíz cuadrada de los siguientes números, si es necesario, calcula hasta dos decimales.

$$\sqrt{81} \quad \rule{1cm}{0.4pt}$$

$$\sqrt{2209} \quad \rule{1cm}{0.4pt}$$

$$\sqrt{5794} \quad \rule{1cm}{0.4pt}$$

$$\sqrt{548.47} \quad \rule{1cm}{0.4pt}$$

II. En los siguientes números, calcula la raíz cuadrada por aproximación.

$$\sqrt{72} = \rule{2cm}{0.4pt}$$

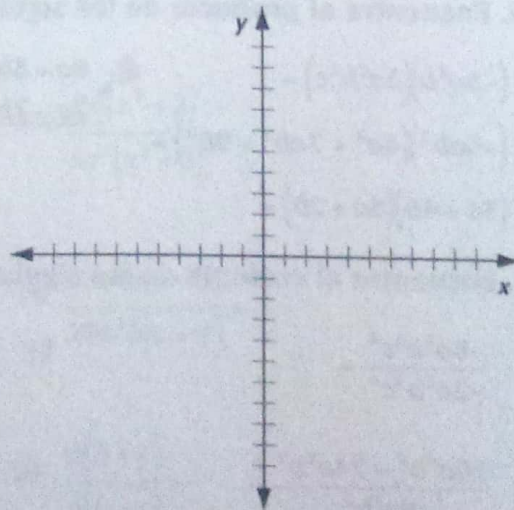
$$\sqrt{44.6} = \rule{2cm}{0.4pt}$$

III. Al terminar de construir una barda de 10 m de longitud, un albañil se da cuenta de que en realidad la barda mide 10.1 m. Determina el error absoluto, el error relativo y el porcentaje de error cometido.

IV. Grafica las siguientes funciones.

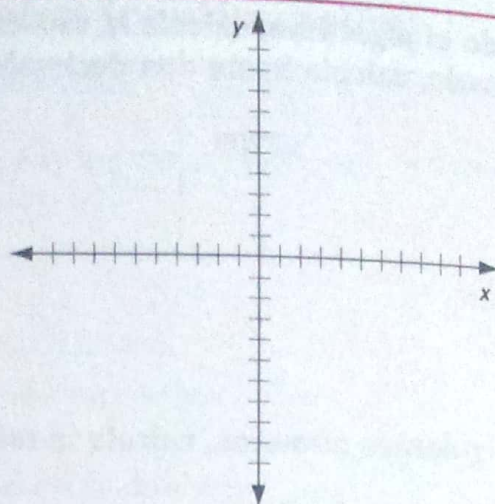
$$y = 3x + 2$$

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



$$y = x^2 + x + 2$$

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



V. Aplicando las leyes de los exponentes realiza las siguientes operaciones algebraicas.

a) $(a^2)^3 =$

b) $(-2ab^2)^4 =$

c) $\frac{6a^2b}{3ab} =$

d) $(2a^3)^2 =$

e) $(2x^2)(-3x^5) =$

f) $\frac{9a^2b^3c}{3ab^2c} =$

g) $(-3x^4)^3 =$

h) $(3a^2b)(5ab) =$

k) $\left(\frac{4a^3}{2a}\right)^2 =$

i) $(6a^2b^3)^2 =$

j) $(-2x^3)(-3x^2y) =$

VI. Resuelve las siguientes sumas algebraicas correctamente.

a) $7a + 4a + 5a =$

b) $4a + 3b - 5c$

c) $8w + 6x - 5c + 7d$

d) $4a + 3a + 5b + 2b =$

$$\underline{6a - 7b + 4c}$$

$$2w + 3x + 9y + z$$

$$\underline{4w + 2x + 3y - 2d}$$

VII. Resuelve las siguientes restas algebraicas correctamente.

a) $(5a + 2b) - (3a - 2b) =$

b) $\underline{11a + 7b - 6c}$

c) $\underline{3a + 4b + 5c}$

$$\underline{6a + 2b + c}$$

$$\underline{-4a + 5b - 2c}$$

VIII. Encuentra el producto de las siguientes multiplicaciones.

a) $(-3a^2b)(2a^3b^2c) =$

d) $\times \underline{8a + 5b}$

e) $\times \underline{6a^2 + 3ab + 7b^2}$

f) $\times \underline{2x^2 - 3xy + 5y^2}$

b) $(-5ab^3)(4a^2 + 7ab^2 - 9b^2) =$

$$\underline{2a - 7b}$$

$$\underline{4a + 9b}$$

$$\underline{5x - 7y}$$

c) $(3a + 4b)(5a + 2b) =$

IX. Encuentra el cociente de las siguientes expresiones algebraicas.

a) $\frac{-8a^3b^2c^4}{-2a^2b^3c^4} =$

b) $\frac{8a^2 + 19a + 10}{3a + 2} =$

c) $\frac{2a^2 + 7a + 3}{a + 3} =$

d) $\frac{16a^4b^3 - 24a^2b^2}{8a^2b^2} =$

Simplificación de fracciones algebraicas

Simplifica las siguientes fracciones a su mínima expresión.

$$1. \frac{12}{24} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3}}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times \cancel{3}} = \frac{1}{2}$$

$$11. \frac{16x^3y^2}{24x^2} =$$

$$2. \frac{4}{8} =$$

$$12. \frac{32w^2x^3y}{16x^2y} =$$

$$3. \frac{12}{14} =$$

$$13. \frac{46p^2r^3}{69p^3y^3} =$$

$$4. \frac{28}{36} =$$

$$14. \frac{72u^2vw^3}{90uv^2w^2} =$$

$$5. \frac{72}{120} =$$

$$15. \frac{x^2y^3z}{x^4y^2z^3} =$$

$$6. \frac{80}{112} =$$

$$16. \frac{a^3b^5x^2}{a^2b^3x} =$$

$$7. \frac{54}{27} =$$

$$17. \frac{x(x+1)}{y(x+1)} =$$

$$8. \frac{2a^3}{6a^2} =$$

$$18. \frac{2x(x^2+3)}{3x^2(x^2+3)} =$$

$$9. \frac{12a^2b^3}{4a^3b} =$$

$$19. \frac{52a^2b(c+d)}{26a^3b(c+d)} =$$

$$10. \frac{48a^3b^2c^5}{36a^2b^2c^3} =$$

$$20. \frac{a(b+c)}{a(b+c)} =$$

LECCIÓN

1

Álgebra

LECCIÓN

2

Suma y resta de fracciones algebraicas

Ejemplo:

$$a) \frac{3}{4} + \frac{5}{4} + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

Recuerda: Para obtener el denominador común:
 $c.d. = 2 \times 2 \times 3 = 12$

3	6	4	2
3	3	2	2
3	3	1	3
1	1	1	

• El denominador común se divide entre cada denominador y el cociente se multiplica por cada numerador.

• Las fracciones impropias se convierten a fracciones mixtas.

• Las fracciones se simplifican a su mínima expresión.

$$b) \frac{2}{3} + \frac{5}{6} + \frac{3}{4} = \frac{8+10+9}{12} = \frac{27}{12} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

Efectúa las siguientes operaciones de suma y resta de fracciones. Compara tus resultados con los que muestran en cada ejercicio y anota la letra que corresponda a la respuesta correcta en el paréntesis de la izquierda.

$$() \frac{2}{5} + \frac{1}{5} =$$

$$a) \frac{3}{10}$$

$$b) \frac{3}{5}$$

$$c) \frac{2}{25}$$

$$() \frac{3}{5} - \frac{2}{4} =$$

$$a) \frac{1}{10}$$

$$b) \frac{3}{10}$$

$$c) \frac{1}{9}$$

$$() \frac{4}{7} - \frac{2}{7} =$$

$$a) \frac{8}{49}$$

$$b) \frac{2}{14}$$

$$c) \frac{2}{7}$$

$$() \frac{9}{10} - \frac{2}{4} - \frac{1}{5} =$$

$$a) \frac{1}{5}$$

$$b) \frac{9}{100}$$

$$c) \frac{6}{19}$$

$$() \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} =$$

$$a) 1\frac{7}{24}$$

$$b) \frac{1}{16}$$

$$c) \frac{3}{10}$$

$$() \frac{3}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{2} =$$

$$a) \frac{4}{11}$$

$$b) \frac{13}{20}$$

$$c) \frac{3}{20}$$

$$() \frac{2}{5} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} =$$

$$a) \frac{2}{15}$$

$$b) \frac{1}{2}$$

$$c) 1\frac{17}{30}$$

$$() \frac{5}{6} + \frac{7}{9} - \frac{1}{3} - \frac{3}{4} =$$

$$a) \frac{35}{216}$$

$$b) \frac{4}{11}$$

$$c) 1\frac{19}{36}$$

Temas relacionados: Equivalencia de fracciones, Suma y resta de fracciones
 Simplificación de fracciones, Suma y resta de dos fracciones

Suma y resta de fracciones algebraicas (continuación)

Resuelve las siguientes sumas y restas de fracciones. Simplifica la fracción resultante a su mínima expresión. No olvides convertir las fracciones impropias en fracciones mixtas.

$$1. \frac{5a}{3} + \frac{4a}{3} = \frac{9a}{3} = 3a$$

$$7. \frac{1}{2x} - \frac{3x}{4x^2} + \frac{x^2}{4x^3y} =$$

$$2. \frac{2a}{7} + \frac{4a}{7} =$$

$$8. \frac{-4a}{a^2w} + \frac{3}{aw} + \frac{x}{2awx} =$$

$$3. \frac{8a}{5} + \frac{3a}{8} =$$

$$9. \frac{2b^3}{ab^2} + \frac{3a^2b^2}{a^3b} - \frac{4ab^2}{a^2b} =$$

$$4. \frac{9a}{3} - \frac{7a}{5} =$$

$$10. \frac{2a+1}{3a} + \frac{a+3}{2a} + \frac{5a-2}{4a} = \frac{4(2a+1) + 6(a+3) + 3(5a-2)}{12a}$$

$$= \frac{8a+4+6a+18+15a-6}{12a}$$

$$= \frac{29a+16}{12a}$$

$$5. \frac{3ax}{2xy} + \frac{5ay}{4y^2} = \frac{(2y)(3ax) + x(5ay)}{4xy^2}$$

$$= \frac{6axy + 5axy}{4xy^2}$$

$$= \frac{11axy}{4xy^2}$$

$$= \frac{11a}{4y}$$

• Para el denominador común, se escoge una variable de cada una, la de mayor exponente.

$$11. \frac{2a+3}{a} - \frac{4a+5}{2a} =$$

$$12. \frac{4a-5}{3a^2} + \frac{3a+2}{6a} =$$

$$6. \frac{3ab}{2a^2b} + \frac{9ax}{4a^2} - \frac{5bx}{4abx} =$$

$$13. \frac{2a+3}{4a} - \frac{3a-2}{5a} + \frac{4a+3}{10a} =$$

LECCIÓN

3

Multiplicación y división de fracciones algebraicas

Multiplicación de fracciones algebraicas.

Ejemplo:

$$\frac{4}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{15}$$

$$\frac{4ab}{5c} \times \frac{3ac}{8b} = \frac{12a^2bc}{40bc} = \frac{3a^2}{10}$$

$$\frac{4(a+3)}{5(a+1)} \times \frac{7(a+1)}{8} = \frac{28(a+3)(a+1)}{40(a+1)} = \frac{7 \times 4(a+3)}{10 \times 4} = \frac{7(a+3)}{10}$$

Recuerda: se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador.

Encuentra los siguientes productos. Reduce las fracciones resultantes a su mínima expresión y convierte las fracciones impropias en fracciones mixtas.

1. $\frac{2}{3} \times \frac{2}{5} =$

7. $\frac{a^3b^2}{ac^2} \times \frac{bc^3}{a^2b} =$

2. $\frac{5}{4} \times \frac{3}{6} =$

8. $\frac{2x^4y^5z}{3y^2z^3} \times \frac{5x^3yz^2}{10x^4y^2} =$

3. $\frac{7}{9} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} =$

9. $\frac{7rst}{4abc} \times \frac{3ab}{5st} \times \frac{4bc}{2ar} =$

4. $\frac{4a}{5} \times \frac{2a}{7} =$

10. $\frac{2(a+1)}{5} \times \frac{4(a+2)}{5(a+1)} =$

5. $\frac{6ab}{4} \times \frac{2a^2bc}{5} =$

11. $\frac{3a(3a+2b)}{8b} \times \frac{4b(2a+1)}{7a(3a+2b)} =$

6. $\frac{2a^2b}{3c} \times \frac{4b^2c^3}{2a^2b} =$

12. $\frac{a+2b}{5a+3} \times \frac{5a+3}{a+1} \times \frac{a+1}{a+2b} =$

Temas relacionados: Multiplicación algebraica, Equivalencia de fracciones
Multiplicación de fracciones

Multiplicación y división de fracciones algebraicas (cont.)

LECCIÓN

3

División de fracciones algebraicas.

$$a) \frac{9}{10} \div \frac{1}{2} = \frac{9 \times 2}{10 \times 1} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5} = 1\frac{4}{5}$$

$$c) \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{5 \times 2}{4 \times 3} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$b) \frac{3ab}{5c} \div \frac{5ab^2}{4a^2c} = \frac{(3ab)(4a^2c)}{(5c)(5ab^2)} = \frac{12a^3bc}{25ab^2c} = \frac{12a^2}{25b}$$

$$d) \frac{\frac{8ab}{4xy}}{\frac{2a^2b}{5x^2y}} = \frac{(5x^2y)(8ab)}{(2a^2b)(4xy)} = \frac{40abx^2y}{8a^2bxy} = \frac{5x}{a}$$

Encuentra el cociente de las siguientes fracciones. Reduce las fracciones a su mínima expresión y convierte las fracciones impropias en fracciones mixtas.

$$1. \frac{3}{5} \div \frac{4}{8} =$$

$$7. \frac{5}{4} \div \frac{3}{2} =$$

$$2. \frac{7}{4} \div \frac{5}{6} =$$

$$8. \frac{7}{2} \div \frac{4}{6} =$$

$$3. \frac{4a}{7} \div \frac{2ab}{3} =$$

$$9. \frac{6a}{5} \div \frac{11a}{10} =$$

$$4. \frac{8a^2b}{9} \div \frac{3ab^2}{7} =$$

$$10. \frac{4x^2y}{2} \div \frac{5x^2y}{4z^2} =$$

$$5. \frac{3ab^2}{5c} \div \frac{4a^2b^3}{5ac^2} =$$

$$11. \frac{8a^2b^3}{9xy^2} \div \frac{5a^2b^2}{6x^2y} =$$

$$6. \frac{6x^2yz^3}{8xy^3z^2} \div \frac{3x^2y^2z}{2xy^3z} =$$

$$12. \frac{16a^2b^3}{7ab^2} \div \frac{12a^3b^2c}{3ac^2} =$$

Álgebra

LECCIÓN

3

Multiplicación y división de fracciones algebraicas (continuación)

Operaciones combinadas.

$$a) \frac{8}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{8 \times 4 \times 2}{5 \times 3 \times 3} = \frac{64}{45} = 1\frac{19}{45}$$

$$b) \frac{4ab}{3c} \times \frac{2bc}{4ab} \div \frac{a^2bc}{3b^2c} = \frac{(4ab)(2bc)(3b^2c)}{(3c)(4ab)(a^2bc)} = \frac{24ab^4c^2}{12a^3b^2c^2} =$$

Realiza las operaciones indicadas en cada ejercicio y anota en el paréntesis de la izquierda la letra que corresponda a la respuesta correcta.

$$() \frac{12}{10} \times \frac{3}{4} \div \frac{2}{3} =$$

a) $\frac{27}{20}$

b) $\frac{3}{5}$

c) $1\frac{7}{20}$

$$() \frac{a^2x^3y^4}{2ab^2} \times \frac{3ab^2}{7x^2y^3} \div \frac{a^2xy}{2x^2y} =$$

a) $\frac{3x^2y}{7}$

b) $\frac{3a^4y}{28}$

c) $\frac{6a^3b^2x^5y^5}{14a^3b^2x^3y^3}$

$$() \frac{3}{4} \div \frac{5}{7} \times \frac{1}{2} =$$

a) $\frac{21}{40}$

b) $\frac{15}{56}$

c) $2\frac{1}{10}$

$$() \frac{4a}{5b} \div \frac{6a}{2b} \times \frac{7a}{3b} =$$

a) $\frac{105a}{4b}$

b) $\frac{4a}{15b}$

c) $\frac{28a^8}{5a^3}$

$$() \frac{5a}{6b} \div \frac{2ab}{4a^2} \times \frac{3b^2c}{5a^2c} =$$

a) $\frac{9b^4}{24a^4}$

b) 1

c) $\frac{60a^3b^2c^2}{60a^3b^2c}$

$$() \frac{2a+1}{2} \times \frac{1}{4a+5} \div \frac{2}{3} =$$

a) $\frac{(2a+1)}{3(4a+5)}$

b) $\frac{2(2a+1)}{6(4a+5)}$

c) $\frac{3(2a+1)}{4(4a+5)}$

Temas relacionados: Multiplicación y división algebraicas, Equivalencia de fracciones
Multiplicación y división de fracciones

Despeje y sustitución algebraica

LECCIÓN

1

Expresa la variable z en función de x .

a) $z = y$ $y = 2x$ si $y = x + 4$

$z = 3y$ $y = -2x + 1$

$z = y - 5$ $y = x^2$

$z = 4y + 2$ $y = x + 5$

b) $z = y^2$

$z = 2y + 5$

$z = y^2$

$z = 3y^2 + 2y + 1$

$y = -5x$ si $y = x - 3$

$y = x + 1$

$y = x + 2$

$y = 2x + 3$

En los siguientes ejercicios, realiza la sustitución algebraica indicada para expresar la variable z en función de la variable x .

1. $z = y$ si $y = 2x$

5. $z = y^2$ si $y = -5x$

2. $z = 3y$ si $y = -2x + 1$

6. $z = 2y + 5$ si $y = x + 1$

3. $z = y - 5$ si $y = x^2$

7. $z = y^2$ si $y = x + 2$

4. $z = 4y + 2$ si $y = x + 5$

8. $z = 3y^2 + 2y + 1$ si $y = 2x + 3$

9. Pedro y Antonio son hermanos. Si Pedro tiene el doble de la edad de Antonio menos 7 años, y la suma de las edades de los dos es de 5 años. ¿Qué edad tiene Pedro? ¿Qué edad tiene Antonio? ¿Quién es el hermano mayor?

10. Nacho y Pepe fueron los jugadores que anotaron los goles de su equipo en el partido de fútbol que ganaron 4 a 1. Si Nacho anotó tres veces más goles que Pepe, ¿cuántos goles anotó cada uno de ellos?

LECCIÓN

1

Despeje y sustitución algebraica (continuación)

Para eliminar números o variables que están sumando.

$$\begin{aligned}x + 5 &= 10 \\x + 5 - 5 &= 10 - 5\end{aligned}$$

$$x = 5$$

Para eliminar números o variables que están restando.

$$\begin{aligned}x - 5 &= 10 \\x - 5 + 5 &= 10 + 5\end{aligned}$$

$$x = 15$$

Para eliminar números o variables que están multiplicando.

$$\begin{aligned}5x &= 10 \\ \frac{5x}{5} &= \frac{10}{5} \\ x &= 2\end{aligned}$$

Para eliminar números o variables que están dividiendo.

$$\begin{aligned}\frac{x}{5} &= 10 \\ 5\left(\frac{x}{5}\right) &= 5(10) \\ x &= 50\end{aligned}$$

Para eliminar exponentes.

$$\begin{aligned}x^2 &= 9 \\ \sqrt{x^2} &= \sqrt{9} \\ x &= 3\end{aligned}$$

Para eliminar radicales.

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &= 3 \\ (\sqrt{x})^2 &= (3)^2 \\ x &= 9\end{aligned}$$

Despeja las literales que se indican en cada una de las siguientes fórmulas.

a) $P = 4a$, despejar a

b) $A = bh$, despejar b y h

c) $A = \frac{bh}{2}$, despejar b y h

d) $V = \frac{s}{t}$, despejar t y s

e) $A = \pi r^2$, despejar r

f) $V_f = V_o + at$, despejar V_o , a y t

g) $V_f^2 = V_o^2 + 2as$, despejar V_f , V_o , a y s

Temas relacionados: Despeje de fórmulas

Ecuaciones lineales

Las ecuaciones lineales reciben este nombre debido a que la gráfica resultante de ellas es precisamente una línea recta.

Encuentra el valor de x en cada una de las siguientes ecuaciones lineales.

1. $2x = 6$

$x = \frac{6}{2}$

$x = 3$

2. $3x = 12$

3. $6x = 18$

4. $-2x = 8$

5. $-5x = -25$

6. $\frac{x}{3} = 4$

$x = 4(3)$

$x = 12$

7. $\frac{x}{2} = 5$

8. $\frac{x}{5} = 1$

9. $\frac{x}{-6} = 3$

10. $\frac{x}{4} = 3$

11. $x + 5 = 4$

$x = 4 - 5$

$x = -1$

12. $x + 2 = 5$

13. $x - 3 = 2$

14. $x - 7 = 1$

15. $x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

16. $2x + 5 = 7$

$2x = 7 - 5$

$2x = 2$

$x = \frac{2}{2}$

$x = 1$

17. $3x + 1 = 10$

18. $4x - 5 = 3$

19. $7x + 2 = 16$

20. $6x - 1 = 3$

21. $6(2x + 3) = 2(5x + 8)$

$12x + 18 = 10x + 16$

$12x - 10x = 16 - 18$

$2x = -2$

$x = \frac{-2}{2}$

$x = -1$

22. $3(x + 2) = 5(2x + 1)$

23. $4(3x + 2) + 2(5x - 6) = 5(2x + 4)$

24. $3(2x + 1) = 5x - 3$

LECCIÓN

1

Álgebra

LECCIÓN

1

Ecuaciones lineales (continuación)

Encuentra el valor de x en las siguientes ecuaciones lineales.

1. $\frac{4x+3}{2} = \frac{8x+5}{5}$

$$5(4x+3) = 2(8x+5)$$

$$20x+15 = 16x+10$$

$$20x-16x = 10-15$$

$$4x = -5$$

$$x = -\frac{5}{4}$$

$$x = -1\frac{1}{4}$$

2. $\frac{3x-2}{4} = \frac{2x+1}{3}$ 3. $\frac{7x+8}{6} = \frac{4x+9}{5}$ 4. $\frac{4x+5}{7} = \frac{x+2}{3}$

5. $\frac{5x+3}{2} = 2x+1$

6. $\frac{3x}{2} + \frac{4}{5} = \frac{4x}{3} + \frac{2}{4}$

$$\frac{15x+8}{10} = \frac{16x+6}{12}$$

$$12(15x+8) = 10(16x+6)$$

$$180x+96 = 160x+60$$

$$180x-160x = 60-96$$

$$20x = -36$$

$$x = -\frac{36}{20}$$

$$x = -\frac{9}{5}$$

$$x = -1\frac{4}{5}$$

7. $\frac{4a}{3} + \frac{5}{2} = -\frac{2a}{4} + \frac{5}{4}$ 8. $\frac{6a}{5} + \frac{7}{2} - \frac{3}{4} = \frac{2a}{9} + \frac{4}{3}$

9. $\frac{3a}{7} + 5 = 4a + \frac{2}{3}$

10. $6x^2 + 3x - 5 = 2(3x^2 + x + 2)$

$$6x^2 + 3x - 5 = 6x^2 + 2x + 4$$

$$6x^2 - 6x^2 + 3x - 2x = 4 + 5$$

$$x = 9$$

11. $3(4x^2 + 8x - 5) = 4x(3x + 2)$

12. $5x + 2 + \frac{3}{x} = 5x - 3 + \frac{4}{x}$

Álgebra

Ecuaciones lineales (continuación)

Resuelve los siguientes problemas.

1. José desea comprar un tocacintas portátil. Al preguntar y comparar precios, se da cuenta que si ahorra lo que le dan semanalmente para sus gastos personales, en siete semanas lo puede comprar. Si el tocacintas cuesta \$350.00, ¿cuánto dinero recibe José cada semana?
2. Rubén invitó a Maribel a la nevería. Si ambos consumieron el mismo tipo de helado y a Rubén le sobraron \$20.00 de los \$50.00 que tenía, ¿cuánto costó cada helado?
3. Juanita fue al cine y gastó la mitad de su dinero en el boleto de entrada. También gastó las dos quintas partes de su dinero al comprar palomitas y refresco. Si le sobraron \$6.00, ¿cuánto dinero tenía Juanita? ¿Cuánto pagó por entrar al cine? ¿Cuánto le costaron las palomitas y el refresco?
4. Hugo, Paco y Luis compraron un balón de fútbol. Si Hugo pagó la tercera parte del costo, Paco la cuarta parte y Luis \$100.00, ¿cuánto costó el balón? ¿Cuánto pagó Hugo? ¿Y Paco?

LECCIÓN

1

Álgebra

LECCIÓN

2

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

PROCEDIMIENTO:

Método por sustitución.

1. Se despeja una variable en cualquiera de las dos ecuaciones.

$$2x + 3y = 8$$

$$4x + y = 6$$

$$4x + y = 6$$

$$y = 6 - 4x$$

2. Se sustituye la variable despejada en la otra ecuación y se resuelve para la variable resultante.

$$2x + 3y = 8$$

$$2x + 3(6 - 4x) = 8$$

$$2x + 18 - 12x = 8$$

$$-10x = 8 - 18$$

$$-10x = -10$$

$$10x = 10$$

$$x = \frac{10}{10}$$

$$x = 1$$

3. El valor obtenido para la variable se sustituye en el despeje del paso 1.

$$y = 6 - 4x$$

$$y = 6 - 4(1)$$

$$y = 6 - 4$$

$$y = 2$$

4. Solución

$$x = 1$$

$$y = 2$$

• Para este método se recomienda despejar la variable con coeficiente igual a 1 para facilitar los cálculos.

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método por sustitución.

1. $3x + 2y = 16$

$$4x + y = 13$$

2. $5x + 2y = 10$

$$3x - y = 6$$

3. $2x + 7y = 17$

$$5x + 4y = 2$$

4. $3x - 8y = -1$

$$5x + 4y = 7$$

Temas relacionados: Ecuaciones lineales, Sustitución algebraica
Despeje de fórmulas

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas (continuación)

PROCEDIMIENTO:

Método por igualación.

1. En el método por igualación se despeja la misma variable en las dos ecuaciones.

$$2x + 3y = 8$$

$$4x + y = 6$$

$$2x + 3y = 8$$

$$3y = 8 - 2x$$

$$y = \frac{8 - 2x}{3}$$

$$4x + y = 6$$

$$y = 6 - 4x$$

2. Se igualan las dos variables despejadas y se resuelve para la variable resultante.

$$y = y$$

$$\frac{8 - 2x}{3} = 6 - 4x$$

$$8 - 2x = 3(6 - 4x)$$

$$8 - 2x = 18 - 12x$$

$$-2x + 12x = 18 - 8$$

$$10x = 10$$

$$x = \frac{10}{10}$$

$$x = 1$$

3. El valor obtenido para la variable se sustituye en una de las dos ecuaciones despejadas.

$$y = 6 - 4x$$

$$y = 6 - 4(1)$$

$$y = 6 - 4$$

$$y = 2$$

4. Solución

$$x = 1$$

$$y = 2$$

LECCIÓN

2

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método por igualación.

1. $3x + 2y = 13$

$$5x + 4y = 23$$

2. $5a + 7b = 13$

$$a + 3b = 1$$

3. $6a + 5b = 13$

$$7a - 2b = -24$$

4. $8x + 5y = 13$

$$4x + 3y = 7$$

Álgebra

LECCIÓN

2

Álgebra

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas (continuación)

PROCEDIMIENTO:

Método por suma y resta. $2x + 3y = 8$
 $4x + y = 6$

1. En el método por suma y resta se multiplica cada ecuación de manera cruzada, por el coeficiente de la variable que se va a eliminar. Si los signos son iguales se cambia uno de ellos. Se efectúa la suma y resta algebraica, resolviendo para la variable resultante.

- Se recomienda eliminar la variable cuyos signos sean diferentes para evitar el cambio de signos.

2. El valor obtenido para la variable se sustituye en una de las dos ecuaciones originales.

3. Solución: $x = 1$
 $y = 2$

$$\begin{aligned} 4x + y &= 6 \\ 4(1) + y &= 6 \\ 4 + y &= 6 \\ y &= 6 - 4 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1(2x + 3y &= 8) \\ 3(4x + y &= 6) \\ -2x - 3y &= -8 \\ 12x + 3y &= 18 \\ 10x &= 10 \\ x &= \frac{10}{10} \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método por suma y resta.

1. $8x - 9y = 7$
 $3x + 2y = 8$

2. $6a + 5b = -8$
 $-3a + 4b = 17$

3. $2x - 3y = 1$
 $5x + 3y = -8$

4. $2x - 3y = 1$
 $5x + 3y = -8$

Temas relacionados: Suma y resta algebraicas, Despeje de fórmulas
 Sustitución algebraica, Operaciones con números naturales

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas (continuación)

PROCEDIMIENTO:

Método gráfico.

1. En el método gráfico se despeja la variable y en cada ecuación.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 4x + y &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 3y &= 8 - 2x \\ y &= \frac{8 - 2x}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x + y &= 6 \\ y &= 6 - 4x \end{aligned}$$

2. Se tabula cada ecuación como se mostró en el tema 1, lección 2 de álgebra.

$$y = \frac{8 - 2x}{3}$$

$$y = 6 - 4x$$

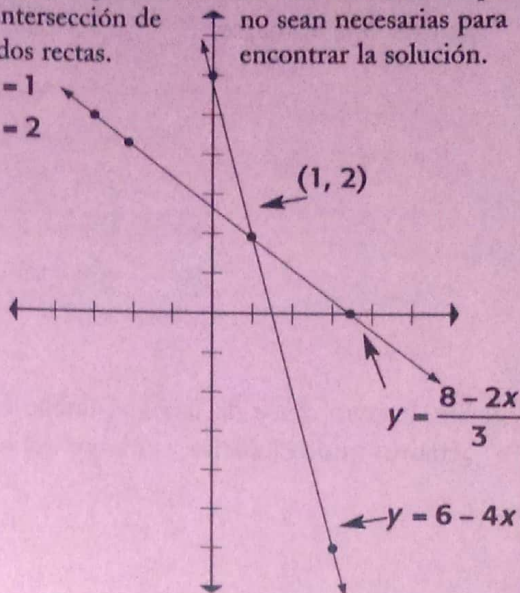
x	y
-3	$4\frac{2}{3}$
-2	4
-1	$3\frac{1}{3}$
0	$2\frac{2}{3}$
1	2
2	$1\frac{1}{3}$
3	$\frac{2}{3}$

x	y
-3	18
-2	14
-1	10
0	6
1	2
2	-2
3	-6

3. La solución viene dada por el punto de intersección de las dos rectas.

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

• Al graficar se pueden omitir coordenadas que no sean necesarias para encontrar la solución.



Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método gráfico.

1. $\begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ 3x + y &= 1 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} x + 4y &= 5 \\ 3x + 2y &= 5 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + 2y &= 0 \end{aligned}$

Temas relacionados: Graficación de funciones
Despeje y sustitución algebraicas, Operaciones con fracciones

LECCIÓN

2

Álgebra

LECCIÓN

2

Álgebra

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas (continuación)

Establece las ecuaciones lineales para cada problema y resuelve cada sistema utilizando el método que prefieras.

1. La suma de dos números diferentes es igual a 13. Si la diferencia entre ellos es igual a 3, ¿cuáles son los dos números?

2. Un terreno mide de largo el doble de su ancho. Si el perímetro del terreno es de 90 metros, ¿cuánto mide el ancho y el largo del terreno?

3. Las edades del señor Guillermo y su hija María suman 42 años. Si la edad del señor Guillermo es cuatro veces la de María más dos años, ¿cuál es la edad de cada uno?

4. Sandra y David tenían \$5.00 cada uno. Si Sandra compró cuatro chicles y tres paletas y David compró ocho chicles y una paleta, ¿cuánto cuesta cada chicle y cada paleta?

Temas relacionados: Graficación de funciones,
Despeje y sustitución algebraicas, Operaciones con fracciones

Sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas

LECCIÓN

3

Método por suma y resta.

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 15 \quad (1) \\ x + 2y - 3z &= 2 \quad (2) \\ 3x + y + 2z &= 13 \quad (3) \end{aligned}$$

1. Se elimina una variable de las ecuaciones (1) y (2).

$$\begin{aligned} 3(2x + 3y + z &= 15) \\ 1(x + 2y - 3z &= 2) \\ \hline 6x + 9y + 3z &= 45 \\ x + 2y - 3z &= 2 \\ \hline 7x + 11y &= 47 \quad (4) \end{aligned}$$

2. Se elimina la misma variable del paso anterior en las ecuaciones (1) y (3).

$$\begin{aligned} 2(2x + 3y + z &= 15) \\ -1(3x + y + 2z &= 13) \\ \hline 4x + 6y + 2z &= 30 \\ 3x - y - 2z &= -13 \\ \hline x + 5y &= 17 \end{aligned}$$

3. Se elimina una variable en las ecuaciones (4) y (5). Se resuelve para la variable resultante.

$$\begin{aligned} 5(7x + 11y &= 47) \\ -11(x + 5y &= 17) \\ \hline 5x + 55y &= 235 \\ -11x - 55y &= -187 \\ \hline 24x &= 48 \\ x &= \frac{48}{24} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

4. El valor obtenido para la variable se sustituye en la ecuación (4) o (5).

$$\begin{aligned} 7x + 11y &= 47 \\ 7(2) + 11y &= 47 \\ 14 + 11y &= 47 \\ 11y &= 47 - 14 \\ 11y &= 33 \\ y &= \frac{33}{11} \\ y &= 3 \end{aligned}$$

5. Los valores obtenidos de las dos variables se sustituyen en una de las tres ecuaciones originales.

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 15 \\ 2(2) + 3(3) + z &= 15 \\ 4 + 9 + z &= 15 \\ 13 + z &= 15 \\ z &= 15 - 13 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 3 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método por suma y resta.

$$\begin{aligned} 1. \quad 5x + 3y - 2z &= 11 \\ 3x + 2y + 4z &= 12 \\ 4x - 5y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad 3a + 2b - 5c &= -4 \\ 4a - 3b + 2c &= -8 \\ 6a + 7b - 3c &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad 4a + 5b + 2c &= 3 \\ 2a - 3b + 4c &= 14 \\ 5a + 2b + 6c &= 14 \end{aligned}$$

LECCIÓN

3

Álgebra

Sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas (continuación)

En los siguientes problemas, plantea las ecuaciones y resuélvelas.

1. Juan, Pedro y Luis fueron a un centro comercial y compraron ropa. Juan compró dos camisas, dos pantalones y tres camisetitas. Pedro compró tres camisas, dos pantalones y dos camisetitas. Luis compró una camisa, dos pantalones y cinco camisetitas. Si Juan gastó \$350.00, Pedro gastó \$370.00 y Luis gastó \$360.00, ¿cuánto cuesta cada prenda de vestir?

2. Cinco amigos fueron al cine en tres ocasiones distintas. En la primera ocasión consumieron cinco bolsas de palomitas, seis refrescos y tres chocolates, gastando \$124.00. La segunda vez consumieron cuatro bolsas de palomitas, cinco refrescos y dos chocolates, gastando \$98.00. La última vez consumieron seis bolsas de palomitas, cinco refrescos y cuatro chocolates, gastando \$130.00. ¿Cuánto cuesta cada uno de los productos mencionados?

Productos notables

LECCIÓN

1

Cuadrado de un binomio.

Es la expresión algebraica de dos términos separados por un signo de suma o resta, dentro de un paréntesis elevado al exponente dos.

- El cuadrado de un binomio también puede expresarse como:

$$(a+b)(a+b) = (a+b)^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(2a+3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$$

Cuadrado del primer término, el doble producto del primer término por el segundo término, más el cuadrado del segundo término.

Relaciona las dos columnas anotando en el paréntesis de la izquierda el número que corresponda a la respuesta correcta.

$$() (5a-3b)^2 =$$

$$() (2a+5b)^2 =$$

$$() (7a-3)^2 =$$

$$() (9a-7b)^2 =$$

$$() (4a+5b)^2 =$$

$$() (5a+7)^2 =$$

$$() (11a-5b)^2 =$$

$$() (13a+8x)^2 =$$

$$() (5x-9y)^2 =$$

$$() (-3x+2y)^2 =$$

$$1. 16a^2 + 40ab + 25b^2$$

$$2. 25x^2 - 90xy + 81y^2$$

$$3. 81a^2 - 126ab + 49b^2$$

$$4. 9x^2 - 12xy + 4y^2$$

$$5. 4a^2 + 20ab + 4y^2$$

$$6. 169a^2 - 208ax + 64x^2$$

$$7. 25a^2 - 30ab + 9b^2$$

$$8. 49a^2 - 42a + 9$$

$$9. 2a^2 + 70a + 49$$

$$10. 121a^2 - 110ab + 25b^2$$

Calcula los siguientes productos. Recuerda aplicar la regla de solución y no realizar el proceso de multiplicación algebraica.

$$1. (6a+5b)^2 =$$

$$2. (8a+b)^2 =$$

$$3. (12a+9b)^2 =$$

$$4. (7x-11y)^2 =$$

$$5. (3ab+2c)^2 =$$

$$6. (5a+6)^2 =$$

$$7. (a-8)^2 =$$

$$8. (a^2+4b)^2 =$$

$$9. (7a^2+2b^2)^2 =$$

$$10. \left(\frac{3a}{2} + \frac{4b}{3}\right)^2 =$$

Temas relacionados: Multiplicación algebraica

Álgebra

LECCIÓN

1

Productos notables (continuación)

Binomios con términos semejantes.

Dos paréntesis multiplicándose; en cada paréntesis una expresión algebraica con dos términos semejantes.

$$(2a + 3b)(4a + 5b) = 8a^2 + \underbrace{10ab + 12ab}_{22ab} + 15b^2 \\ = 8a^2 + 22ab + 15b^2$$

$$(3a - 7b)(2a + 5b) = 6a^2 + 15ab - 14ab - 35b^2 \\ = 6a^2 + ab - 35b^2$$

Se multiplica el primer término del primer paréntesis por los dos términos del segundo paréntesis; se multiplica el segundo término del primer paréntesis por los dos términos del segundo paréntesis; el segundo y tercer términos del producto resultante se suman o se restan sus signos.

Relaciona las dos columnas anotando en el paréntesis de la izquierda el número que corresponda a la respuesta correcta.

() $(3a + 2b)(4a + 3b)$

() $(4a + 5b)(3a + b)$

() $(2a + 5b)(4a - 7b)$

() $(2a - 5b)(4a - 3b)$

() $(3a + 5b)(2a - 11b)$

() $(7x + 5y)(4x - 3y)$

() $(8a - 3x)(10a - 6x)$

() $(4a + 3)(2a + 1)$

() $(9a + 7b)(8a + 4b)$

() $(-4a + 6b)(5a + 7b)$

1. $8a^2 + 6ab - 35b^2$

2. $6a^2 - 23ab - 55b^2$

3. $80a^2 - 78ab + 18b^2$

4. $72a^2 + 92ab + 28b^2$

5. $12a^2 + 19ab + 5b^2$

6. $8a^2 + 10a + 3$

7. $28x^2 - xy - 15y^2$

8. $-20a^2 + 2ab + 42b^2$

9. $8a^2 - 26ab - 15b^2$

10. $12a^2 + 17ab + 6b^2$

Encuentra los siguientes productos. Recuerda aplicar la regla de solución.

1. $(7a + 2b)(11a + 3b) =$

2. $(12a - 5b)(4a + 9b) =$

3. $(3a + 4b)(2a + b) =$

4. $(6a - x)(8a + 7b) =$

5. $(5a + 6)(6a + 7) =$

6. $(8a + 3b)(13a - 5b) =$

7. $(6a^2 + 2b)(2a^2 + 3b) =$

8. $(7a + 5b^2)(4a + 3b) =$

9. $(2a^2 + 5b^2)(4a^2 - 9b^2) =$

10. $\left(\frac{2a}{3} + \frac{5b}{6}\right)\left(\frac{2a}{3} - \frac{5b}{6}\right) =$

Temas relacionados: Multiplicación algebraica

Productos notables (continuación)

Producto de binomios conjugados.

Dos paréntesis multiplicándose; en cada paréntesis una expresión algebraica con términos iguales, pero signos diferentes dos de ellos. Ejemplo:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$(6a-5b)(6a+5b) = 36a^2 - 25b^2$$

La multiplicación de los primeros términos de cada paréntesis menos la multiplicación de los segundos términos de cada paréntesis.

Relaciona las dos columnas anotando en el paréntesis de la izquierda el número que corresponda a la respuesta correcta.

- () $(2a+3b)(2a-3b)$
- () $(4a-5b)(4a+5b)$
- () $(2a+5b)(2a-5b)$
- () $(7a-6)(7a+6)$
- () $(8a+3x)(8a-3x)$
- () $(9a-7b)(9a+7b)$
- () $(6a+5b)(6a-5b)$
- () $(a+3b)(a-3b)$
- () $(2a-9b)(2a+9b)$
- () $(11a+12x)(11a-12x)$

- 1. $4a^2 - 25b^2$
- 2. $81a^2 - 49b^2$
- 3. $36a^2 - 25b^2$
- 4. $4a^2 - 81b^2$
- 5. $16a^2 - 25b^2$
- 6. $121a^2 - 144x^2$
- 7. $a^2 - 9b^2$
- 8. $4a^2 - 25b^2$
- 9. $64a^2 - 9x^2$
- 10. $49a^2 - 36$

Encuentra los productos indicados. Aplica la regla de solución.

- 1. $(8a-7b)(8a+7b) =$
- 2. $(2a+b)(2a-b) =$
- 3. $(5x+3y)(5x-3y) =$
- 4. $(6x-y)(6x+y) =$
- 5. $(a+11b)(a-11b) =$
- 6. $(a^2-b^2)(a^2+b^2) =$
- 7. $(5a^3+b)(5a^3-b) =$
- 8. $(4a-1)(4a+1) =$
- 9. $(3a^3-2b^2)(3a^3+2b^2) =$
- 10. $(2a+5b)(2a-5b) =$

Temas relacionados: Multiplicación algebraica

LECCIÓN

1

Álgebra

LECCIÓN

2

Factorización

Trinomio cuadrado perfecto.

Es la expresión algebraica de tres términos cuyos extremos tienen raíz cuadrada exacta. Ejemplo:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a + 3b)^2$$

Raíz cuadrada del primer término, signo del segundo término, raíz cuadrada del tercer término; todo en un paréntesis elevado al exponente dos.

Comprobación: El doble producto de la raíz del primer término por la raíz del tercer término debe ser igual al segundo término.

- La factorización es el proceso inverso de los productos notables. En ellas se buscan los factores que originaron el producto.
- El trinomio cuadrado perfecto es el resultado de elevar al cuadrado un binomio.

Relaciona las dos columnas anotando en el paréntesis de la izquierda el número que corresponda a la respuesta correcta.

() $16a^2 + 40ab + 25b^2$

() $a^2 + 6a + 9$

() $49a^2 + 28ab + 4b^2$

() $9x^2 - 54xy + 81y^2$

() $64a^2 - 112ab + 49b^2$

() $144x^2 - 364xy + 121y^2$

() $25a^2 + 70ab + 49b^2$

() $81x^2 - 36ab + 4b^2$

() $100x^2 + 260xy + 169y^2$

() $36a^2 + 96ab + 64b^2$

1. $(9x - 2b)^2$ • El resultado también puede expresarse como:

2. $(12x - 11y)^2$ $(9x - 2b)(9x - 2b) = 81x^2 - 18b - 18b + 4b^2$

3. $(10x + 13y)^2$ $= 81x^2 - 36b + 4b^2$

4. $(4a + 5b)^2$

5. $(7a + 2b)^2$

6. $(6a + 8b)^2$

7. $(3x - 9y)^2$

8. $(a + 3)^2$

9. $(8a - 7b)^2$

10. $(5a + 7b)^2$

Factoriza las siguientes expresiones algebraicas.

1. $16a^2 + 8ab + b^2 =$

2. $4a^2 + 36ab + 81b^2 =$

3. $100x^2 - 60xy + 9y^2 =$

4. $81x^2 - 126xy + 49y^2 =$

5. $a^2 + 2a + 1 =$

6. $4a^4 + 12a^2b + 9b^2 =$

7. $64a - 80ab^2 + 25b^4 =$

8. $a^6 + 26a^3b^2 + 169b^4 =$

9. $\frac{1a^2}{4} - a + 1 =$

10. $\frac{4a^2}{9} + \frac{4ab}{5} + \frac{9}{25} =$

Temas relacionados: Multiplicación algebraica

Factorización (continuación)

LECCIÓN

2

Trinomio de segundo grado. Primer caso.

Expresión algebraica de tres términos. El primer término es una variable elevada a un exponente par con coeficiente igual a uno. Por lo general el coeficiente del tercer término no tiene raíz cuadrada.

$$ax^2 + bx + c, a = 1$$

Por ejemplo:

$$x^2 - 7x + 12 = (x + 5b)(x + 3)$$

$$a^2 + 15ab + 50b^2 = (a + 5b)(a + 10b)$$

Se busca una pareja de números cuyo término y cuya suma o diferencia sea igual al segundo término. Se acomodan en dos paréntesis con la variable del primer término.

- El trinomio de segundo grado es el resultado de la multiplicación de binomios con términos semejantes.

Relaciona las dos columnas anotando en el paréntesis de la izquierda el número que corresponda a la respuesta correcta.

() $x^2 + 7x + 10$

() $x^2 + 8x + 15$

() $x^2 + 11xy + 28y^2$

() $x^2 + 9xy + 18y^2$

() $a^2 + 9ab + 14b^2$

() $a^2 - 11ab + 30b^2$

() $x^2 - 10xy + 21y^2$

() $a^2 - 16ab + 39b^2$

() $x^2 - 21xy + 98y^2$

() $x^2 - 17xy + 52y^2$

1. $(x + 7y)(x + 4y)$

2. $(a + 7b)(a + 2b)$

3. $(x - 7y)(x - 3y)$

4. $(x - 14y)(x - 7y)$

5. $(a - 13b)(a - 3b)$

6. $(x + 5)(x + 3)$

7. $(x - 13y)(x - 4y)$

8. $(a - 6b)(a - 5b)$

9. $(x + 5)(x + 2)$

10. $(x + 6y)(x + 3y)$

Factoriza las siguientes expresiones algebraicas.

1. $a^2 + 3ab + 2b^2 =$

2. $a^2 + 5ab + 6b^2 =$

3. $x^2 + 13ab + 30b^2 =$

4. $x^2 + 15xy + 56y^2 =$

5. $a^2 + 10ab + 9b^2 =$

6. $a^2 - 23ab + 132b^2 =$

7. $a^2 - 9ab + 20b^2 =$

8. $a^2 - 4a + 3 =$

9. $a - 8ab + 12b =$

10. $a^2 - 7ab + 6b^2 =$

LECCIÓN

2

Álgebra

Factorización (continuación)

Relaciona las dos columnas anotando en el paréntesis de la izquierda el número que corresponda a la respuesta correcta.

() $(a^2 + ab - 6b^2)$

() $(a + 5ab - 36b^2)$

() $(a^2 + 3ab - 10b^2)$

() $(a + 8ab - 20b^2)$

() $(a^2 + 6a - 40)$

() $(a - 7ab - 30b)$

() $(a^2 - 4ab - 32b^2)$

() $(a^2 - 11ab - 60b^2)$

() $(a^4 - 16a^2b - 80b^2)$

() $(a^2 - 4ab - 5b)$

1. $(a + 5b)(a - 2b)$

2. $(a + 10)(a - 4)$

3. $(a - 8b)(a + 4b)$

4. $(a^2 - 20b)(a^2 + 4b)$

5. $(a - 15b)(a + 4b)$

6. $(a + 9b)(a - 4b)$

7. $(a - 5b)(a + b)$

8. $(a - 10b)(a + 3b)$

9. $(a + 3b)(a - 2b)$

10. $(a + 10b)(a - 2b)$

Factoriza las siguientes expresiones algebraicas.

1. $a^2 + 3ab - 18b^2 =$

2. $a^2 + 7ab - 18b^2 =$

3. $a^2 + 9ab - 22b^2 =$

4. $a^2 + 5ab - 14b^2 =$

5. $a^2 + ab - 12b^2 =$

6. $a^2 + 2ab - 63b =$

7. $a^2 - 8ab - 33b^2 =$

8. $a^2 - 6ab - 16b^2 =$

9. $a^2 - 12ab - 45b^2 =$

10. $a^2 - 10ab - 20b^2 =$

11. $a^2 - 5ab - 104b^2 =$

12. $a^2 - ab - 9900b^2 =$

Temas relacionados: Multiplicación algebraica

Factorización (continuación)

LECCIÓN

2

PROCEDIMIENTO:

Trinomio de segundo grado. Segundo caso

Se busca una pareja de números cuyo producto sea igual al coeficiente del primer término; se acomodan en columna. Se busca una segunda pareja de números cuyo producto sea igual al coeficiente del tercer término; se acomodan en columna.

Las columnas se multiplican de frente o cruzadas y la suma o resta de los productos debe ser igual al coeficiente del segundo término.

- Si las columnas se multiplican cruzadas, los números en los paréntesis se acomodan de frente, y viceversa.

$$(ax^2 + bx + c, a \neq 1)$$

$$\begin{array}{rcl} 3 & \nearrow & 4 \rightarrow -4 \\ 1 & \searrow & 2 \rightarrow -\frac{6}{10} \end{array}$$

$$3x^2 - 10x + 8 = (3x + 4)(x + 2)$$

Relaciona las dos columnas anotando en el paréntesis de la izquierda el número que corresponda a la respuesta correcta.

() $2x^2 + 7x + 3$

() $3x + 8x + 5$

() $2x^2 + 9xy + 7y^2$

() $4x + 8xy + 3y$

() $5x^2 + 2xy - 3y^2$

() $4x + 9xy - 9y$

() $8x^2 + 10xy - 3y^2$

() $6x - xy - 12y^2$

() $15x^2 - 22xy + 8y^2$

() $16x - 4xy - 6y$

1. $(2x + 7y)(x + y)$

2. $(5x - 3y)(x + y)$

3. $(3x + 4y)(2x - 3y)$

4. $(4x - 3y)(x + 3y)$

5. $(5x - 4y)(3x - 2y)$

6. $(2x + 1)(x + 3)$

7. $(4x + 2y)(4x - 3y)$

8. $(4x - y)(2x + 3y)$

9. $(2x + y)(2x + 3y)$

10. $(3x + 5)(x + 1)$

Factoriza las siguientes expresiones algebraicas.

1. $5x^2 + 13xy + 6y^2 =$

2. $3x^2 + 9xy + 6y^2 =$

3. $4x^2 - 9xy + 5y^2 =$

4. $7x^2 + 11xy - 6y^2 =$

5. $6x^2 - 4xy - 10y^2 =$

6. $8x^2 + 6xy - 9y^2 =$

7. $2x^2 - xy - 3y^2 =$

8. $20x^2 - 5xy - 15y^2 =$

Temas relacionados: Multiplicación algebraica

Álgebra

LECCIÓN

2

Álgebra

Factorización (continuación)

Diferencia de cuadrados.

Expresión algebraica de dos términos que tiene raíz cuadrada exacta y signos diferentes. Ejemplo:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$4a^2 - 9b^2 = (2a + 3b)(2a - 3b)$$

Raíz cuadrada del primer término menos raíz cuadrada del segundo término, todo dentro de un paréntesis multiplicado por otro con los mismos términos, pero positivos los dos.

- La diferencia de cuadrados es el resultado de la multiplicación de los binomios conjugados.

Relaciona las dos columnas anotando en el paréntesis de la izquierda el número que corresponda a la respuesta correcta.

- | | |
|-----------------------|-----------------------------|
| () $4a^2 - 25b^2$ | 1. $(6x - 6y)(6x + 9y)$ |
| () $16a^2 - 49b^2$ | 2. $(10x - 11y)(10x + 11y)$ |
| () $x^2 - 4y^2$ | 3. $(7x - 10y)(7x + 10y)$ |
| () $9x - 16y^2$ | 4. $(4a - 7b)(4a + 7b)$ |
| () $36x^2 - 16y^2$ | 5. $(4a - 13b)(4a + 13b)$ |
| () $64a - 49y^2$ | 6. $(9a - x)(9a + x)$ |
| () $100x^2 - 121y^2$ | 7. $(x - 2y)(x + 2y)$ |
| () $81a^2 - x^2$ | 8. $(8a - 7y)(8a + 7y)$ |
| () $49x^2 - 100y^2$ | 9. $(2a - 5b)(2a + 5b)$ |
| () $16a - 169b$ | 10. $(3x - 4y)(3x + 4y)$ |

Factoriza las siguientes expresiones algebraicas.

- $36a^2 - 4 =$
- $16a^2 - 9y^2 =$
- $49a^2 - 25b^2 =$
- $144a^2 - 1 =$
- $169x^2 - 121y^2 =$
- $100x^2 - y^2 =$
- $4x^6 - 9y^4 =$
- $x^2 - 16y^2z^2 =$
- $x^2 - y^2 =$
- $\frac{4a^2}{9} - \frac{16b^2}{25} =$

Temas relacionados: Multiplicación algebraica

Factorización (continuación)

LECCIÓN

2

PROCEDIMIENTO:

Factor común.

Expresión algebraica de dos o más términos que tienen literales comunes.

1. Para obtener el factor común, se escoge una variable de cada una de las que aparecen en la expresión algebraica, la de menor exponente.
2. Para obtener el factor común numérico, se calcula el mínimo común múltiplo de todos los coeficientes de la expresión algebraica.
3. Obteniendo el factor común, todos los términos de la expresión algebraica se dividen entre él y el cociente se expresa como un producto.

Ejemplo:

$$16a^2b^3c - 12a^2b^3c = 4a^2b^3c(4b - 3b)$$

$$\begin{array}{r|l} 16 & 12 \\ 8 & 6 \\ 4 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 2 \end{array}$$

$$mcm(2 \times 2) = 4$$

$$4a^2 - 9b^2 = (2a + 3b)(2a - 3b)$$

$$\frac{16a^2b^3c}{4a^2b^3c} = 4b$$

$$\frac{12a^3b^2c}{4a^2b^3c} = 3a$$

Relaciona las dos columnas anotando en el paréntesis de la izquierdo el número que corresponda a la respuesta correcta.

- () $ab - ac$
- () $abc - abd$
- () $a^2b + ab^2$
- () $a^3 + 3a^2b + 5ab^2$
- () $2a + 8ab + 4ab^2$
- () $16a^3b^2 - 24a^2b^2 + 20a^2b^3$
- () $6a^3b^2 + 9a^4b^2 - 15a^3b$
- () $6a^3x - 4ax^2 + 2ax$
- () $28a^5 + 14a^4 - 7a^3$
- () $\frac{a^2}{4} + \frac{ab}{4} + \frac{b^2}{4}$

1. $ab(a + b)$
2. $4a^2b^2(4a - 6 + 5b)$
3. $2ax(3a^2 - 2x + 1)$
4. $3a^2b(2ab + 3ab - 5a)$
5. $\frac{1}{4}(a^2 + ab + b^2)$
6. $ab(c - d)$
7. $7a^3(4a^2 + 2a - 1)$
8. $a(a^2 + 3ab + 5b^2)$
9. $a(b - c)$
10. $2a(a + 4b + 2b^2)$

Factoriza las siguientes fracciones algebraicas.

1. $a^3 + ab^2 + a^2c =$
2. $a^2b + ab^2 + abc =$
3. $12ax + 8ay =$
4. $20a^2 - 10ab + 15ac =$
5. $10a^3b + 6a^2b^2 =$
6. $24a^2b^2c + 16ab^2c^2 =$
7. $a^3b^3c + a^3b^4c + a^2b^3c =$
8. $2x + 4y - 2z =$
9. $-8a^2 + 6ab - 4ac =$
10. $\frac{3a^2}{5} - \frac{1ab}{5} =$

Álgebra

LECCIÓN

2

Factorización (continuación)

PROCEDIMIENTO:

Reduce la siguiente fracción algebraica hasta su mínima expresión.

$$\frac{x^2 - 25}{x^2 - 2ab - 10} = \frac{(x-5)(x+5)}{(x+2)(x-5)} = \frac{x+5}{x+2}$$

La reducción de fracciones algebraicas a su mínima expresión es una aplicación de la factorización.

Reduce las siguientes fracciones algebraicas hasta su mínima expresión. Busca en la columna del lado derecho la respuesta que coincida con la que obtuviste y anota la letra que corresponda en el paréntesis de la izquierda.

() $\frac{a^2 - ab}{a^2 - 2ab - b^2} =$

a) $\frac{a+2}{a+1}$

() $\frac{a^2 - b}{a^2 + 2ab - b^2} =$

b) $\frac{a+3b}{a+b}$

() $\frac{a^2 + 5a + 6}{a^2 + 4a + 3} =$

c) $\frac{6a}{2a+b}$

() $\frac{18a^2 - 12ab}{6a^2 - ab + 2b^2} =$

d) $\frac{a}{a-b}$

() $\frac{2a^2 + 11ab + 15b^2}{2a^2 + 7ab + 5b^2} =$

e) $\frac{a+b}{3a+2b}$

() $\frac{3a^2 + ab - 2b^2}{9a^2 - 4b^2} =$

f) $\frac{a-b}{a+b}$

Reduce las siguientes fracciones algebraicas a su mínima expresión.

a) $\frac{a^2b + ab^2}{a^2 + b^2} =$

b) $\frac{4a^2 - 9b^2}{10a^2 + 15ab} =$

c) $\frac{16a^2 + 24ab + 9b^2}{16a^2 - 9b^2} =$

d) $\frac{8a^2 + 22ab + 15b^2}{4a^2 + 9ab + 5b^2} =$

e) $\frac{a^2 - 2ab - 15b^2}{a^2 - 10ab + 25b^2} =$

f) $\frac{64a^3b + 48a^2b^2 + 32a^2bc}{32a^2 + 24ab^2 + 16abc} =$

Temas relacionados: Multiplicación algebraica
Fracciones algebraicas

I. Simplifica las siguientes fracciones hasta su mínima expresión.

a) $\frac{18}{24} =$

b) $\frac{4a^2b^3c}{2ab^2} =$

c) $\frac{3a^2(2a+5)}{6ab(2a+5)} =$

d) $\frac{8a^2b+16ab^2}{a^2-ab-6b^2} =$

II. Realiza las siguientes operaciones con fracciones algebraicas. Reduce los resultados obtenidos hasta su mínima expresión.

a) $\frac{3a}{9} + \frac{4a}{9} =$

b) $\frac{3a}{4} + \frac{5a}{6} - \frac{3a}{2} =$

c) $\frac{6a^2b}{2ab} - \frac{3ab}{4b} =$

d) $\frac{8a+3b}{2a} + \frac{a-4b}{9} + \frac{5a^2-4b^2}{4ab} =$

e) $\frac{4a}{5} \times \frac{3a}{8} =$

f) $\frac{5ab^2c}{3ab} \times \frac{2a^3b^2c}{6a^2b^3} \times \frac{3abc^3}{2ab^2c^4} =$

g) $\frac{2a+3}{5a+2} \times \frac{3a-1}{4a+5} \times \frac{5a+2}{3a-1} =$

h) $\frac{3a^2}{2b} \div \frac{4a^2b}{8ab} =$

i) $\frac{4a^2b^3}{5ab^2c^2} \div \frac{6a^2b^3c}{7ab^2c^4} =$

j) $\frac{3a^2bx}{6ab^2x} \times \frac{2a^3b^2x}{3a^4bx^2} \div \frac{3a^2b^2x}{9a^3bx} =$

III. En las siguientes ecuaciones sustituye el valor indicado para x y encuentra el valor de y. Despeja si es necesario.

a) $y = 2x + 1$, si $x = 1$

b) $3x^2 - 5x - y + 2 = 0$, si $x = -2$

c) $xy = 2$, si $x = 2$

IV. Resuelve para x cada una de las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{x}{2} = 4$

b) $x + 1 = 3$

c) $2x + 3 = 9$

d) $4x + 3 = 2x + 11$

e) $4(3x + 2) = 5(2x + 4)$

f) $\frac{8x-8}{4} = \frac{7x+5}{5}$

g) $\frac{6x}{3} + 4 = \frac{5x}{6} + \frac{2}{4}$

V. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones. Utiliza el método que consideres más adecuado.

a) $3x + 2y = 4$
 $2x - 3y = 7$

b) $3x + 2y - z = 5$
 $2x - 4y + 3z = 9$
 $4x + y + 2z = 15$

VI. Calcula los siguientes productos notables aplicando las reglas de solución.

a) $(2a + 3b)^2 =$

c) $(7x - 5y)^2 =$

e) $(10a + 7)^2 =$

g) $(4a + 3b)(4a - 3b) =$

i) $(7a - 5b)(7a - 5b) =$

b) $(7x + 3y)(5x + 2y) =$

d) $(9x - 7y)(6x - 5y) =$

f) $(3x - 2y)(8x + y) =$

h) $(6a + 7)(11a + 8) =$

j) $(12x - 13)(12x + 13) =$

VII. Factoriza las siguientes expresiones algebraicas.

a) $16a^2 + 24a + 9 =$

c) $25x^2 - 80 + 64 =$

e) $9x^2 - 12x + 4 =$

g) $64a^2 + 48a + 9 =$

i) $x^2 + 18x + 72 =$

k) $x^2 - 7x + 12 =$

m) $x^2 + 2x - 35 =$

ñ) $x^2 - 5x - 24 =$

p) $10a^2 + 23a + 12 =$

r) $3x^2 + 11x + 10 =$

b) $12a^2 - 13a - 14 =$

d) $30a^2 - 53a + 21 =$

f) $36a^2 - 25 =$

h) $49x^2 - 1 =$

j) $x^2 - 64 =$

l) $a^2 - 81 =$

n) $15a^2 + 10ab =$

o) $21a^3b - 12a^2b^2 =$

q) $24a^4b^3 + 16a^4b^2c - 40a^3b^3c =$

s) $-60a^2b - 84abc - 36ac =$

Ecuaciones incompletas

PROCEDIMIENTO:

Ecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2 + bx = 0$

1. Se factoriza por factor común. $x^2 - 3x = 0$
 $x(x - 3) = 0$
2. Se igualan los dos factores a cero. $x = 0$ $x - 3 = 0$
3. x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación. $x_1 = 0$ $x_2 = 3$

Encuentra las soluciones de la siguientes ecuaciones incompletas de segundo grado.

a) $x^2 - 6x = 0$ b) $x^2 + 2x = 0$ c) $x^2 - 7x = 0$ d) $x^2 + 9x = 0$

e) $3x^2 + 7x = 0$ f) $5x^2 + 3x = 0$ g) $7x^2 + 2x = 0$ h) $6x^2 + 5x = 0$

i) $4x^2 + 8x = 0$ j) $3x^2 - 6x = 0$ k) $10x^2 - 5x = 0$ l) $6x^2 + 12x = 0$

LECCIÓN

1

Álgebra

LECCIÓN

1

Ecuaciones incompletas (continuación)

PROCEDIMIENTO:

Ecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2 + c = 0$

1. Se despeja la variable.

$$4x^2 - 16 = 0$$

$$4x^2 = 16$$

$$x^2 = \frac{16}{4}$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

2. x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación. $x_1 = 2$ $x_2 = -2$

Resuelve las siguientes ecuaciones incompletas de segundo grado despejando la variable.

a) $x^2 - 4 = 0$

b) $x^2 - 9 = 0$

c) $x^2 - 36 = 0$

d) $x^2 - 1 = 0$

e) $4x^2 - 4 = 0$

f) $3x^2 - 27 = 0$

g) $6x^2 - 24 = 0$

h) $7a^2 - 112 = 0$

i) $-2x^2 + 50 = 0$

j) $4x^2 - \frac{9}{4} = 0$

k) $9x^2 - 16 = 0$

l) $\frac{2}{4}a^2 - \frac{1}{8} = 0$

Temas relacionados: Despeje de fórmulas
Raíz cuadrada

Ecuaciones completas

LECCIÓN

2

Álgebra

PROCEDIMIENTO:

Ecuaciones de la forma $(ax^2 + bx + c = 0)$

Solución por factorización

1. Se factoriza el trinomio de segundo grado.

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$(x + 3)(x + 2) = 0$$

2. Se igualan los dos paréntesis a cero.

$$x + 3 = 0$$

$$x + 2 = 0$$

3. x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación.

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = -2$$

Resuelve por factorización las siguientes ecuaciones completas de segundo grado.

a) $x^2 + 7x + 10 = 0$

b) $x^2 - 7x + 10 = 0$

c) $x^2 - 4x - 21 = 0$

d) $x^2 + 3x - 4 = 0$

e) $5x^2 + 18x - 8 = 0$

f) $12a^2 + 19a + 5 = 0$

g) $6a^2 - 7a - 3 = 0$

h) $a^2 - a + \frac{1}{4} = 0$

i) $6x^2 - x - 2 = 0$

LECCIÓN

2

Ecuaciones completas (continuación)

PROCEDIMIENTO:

Solución completando el trinomio cuadrado perfecto.

1. Se despeja el término constante.

$$x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$x^2 + 6x = 7$$

2. Se agrega un término numérico en ambos lados de la ecuación para completar el trinomio cuadrado perfecto. Dicho término se calcula dividiendo entre dos el coeficiente de x , y elevando el cociente al cuadrado.

$$\left(\frac{6}{2} = 3, (3)^2 = 9\right)$$

$$x^2 + 6x + 9 = 7 + 9$$

$$x^2 + 6x + 9 = 16$$

$$(x + 3)^2 = 16$$

3. Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto y se despeja la variable.

$$\sqrt{(x + 3)^2} = \sqrt{16}$$

$$x + 3 = \pm 4$$

$$x = \pm 4 - 3$$

4. x^1 y x^2 son las soluciones de la ecuación $x_1 = 4 - 3$ $x_2 = -4 - 3$
 $x_1 = 1$ $x_2 = -7$

Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones de segundo grado completando los trinomios cuadrados perfectos.

a) $x^2 + 8x - 9 = 0$

b) $x^2 + 10x + 16 = 0$

c) $x^2 + 2x - 3 = 0$

d) $x^2 + 6x + 5 = 0$

e) $x^2 - 4x - 5 = 0$

f) $x^2 - 12x + 11 = 0$

g) $x^2 + x - 2 = 0$

h) $4x^2 + 8x + 3 = 0$

Fórmula general

LECCIÓN

3

PROCEDIMIENTO:

Solución de ecuaciones de segundo grado utilizando la fórmula general.

1. Se sustituyen los valores de a , b y c en la fórmula general y se resuelve para la variable.

$$\begin{array}{rcl} ax^2 + bx + c = 0 & a = 2 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow & b = -5 \\ 2x^2 - 5x + 2 = 0 & c = 2 \end{array}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(2)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4}$$

$$x = \frac{5 + 3}{4}$$

$$x_1 = \frac{5 + 3}{4} \quad x_2 = \frac{5 - 3}{4}$$

$$x_1 = \frac{8}{4} \quad x_2 = \frac{2}{4}$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

2. x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación.

- Con la fórmula general también se pueden resolver ecuaciones de segundo grado incompletas.

Encuentra las soluciones para las siguientes ecuaciones de segundo grado, utilizando la fórmula general.

a) $x^2 + 2x - 3 = 0$

b) $x^2 - 3x - 4 = 0$

Álgebra

LECCIÓN

3

Álgebra

Fórmula general (continuación)

c) $3x^2 - 4x + 1 = 0$

d) $5x^2 + 3x - 2 = 0$

e) $3x^2 - 4x = 0$

f) $2x^2 + x = 0$

g) $2x^2 - 4 = 0$

h) $9x^2 - 16 = 0$

Fórmula general (continuación)

LECCIÓN

3

PROCEDIMIENTO:

Análisis del discriminante.

$$b^2 - 4ac$$

Si $b^2 - 4ac = 0$

Si $b^2 - 4ac > 0$

$b^2 - 4ac < 0$

• Es el radicando de la fórmula general

la solución tiene una solución única.

la ecuación tiene dos soluciones.

la ecuación no tiene soluciones reales.

$$x_1$$

$$x_1 \text{ y } x_2$$

$$x = \sqrt{-a}$$

En las siguientes ecuaciones de segundo grado, calcula el valor del discriminante y determina el número de soluciones posibles que puede tener la ecuación.

$$3x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (5)^2 - 4(3)(2) \\ &= 25 - 24 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$b^2 - 4ac > 0$$

Por tanto, la ecuación tiene dos soluciones.

a) $x^2 - 6x + 5 = 0$

b) $x^2 - 5x + 4 = 0$

c) $2x^2 + 7x + 3 = 0$

d) $x^2 - 4x + 4 = 0$

e) $x^2 + 2x + 1 = 0$

f) $2x^2 + 5x + 6 = 0$

g) $x^2 - 2x + 3 = 0$

$$\begin{aligned} &4 \cdot 2 \cdot 6 \\ &8 \cdot 6 \\ &25 - 48 \end{aligned}$$

h) $2x^2 - 5x - 3 = 0$

i) $x^2 + 3x - 4 = 0$

j) $2x^2 + x - 1 = 0$

k) $x^2 - 8x + 15 = 0$

Álgebra

LECCIÓN

3

Fórmula general (continuación)

Resuelve los siguientes problemas planteando la ecuación cuadrática correcta y utilizando el método más adecuado.

1. Pedro pronto terminará su educación secundaria. Si el número de años que le faltan a Pedro para terminar la secundaria es elevado al cuadrado y al resultado se le suma el doble de la cantidad de años faltantes, el resultado es tres años. ¿Cuántos años le faltan a Pedro para terminar su educación secundaria?

$$x^2 + 2x = 3$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x+3) (x-1)$$

2. Clarissa tiene siete años más que su hermana María. Si el producto de sus edades es 98, ¿cuántos años tiene María? ¿Cuál es la edad de Clarissa?

$$(x+7)x = 98$$

$$x^2 + 7x - 98 = 0$$

3. Luis ayudó a su equipo de beisbol a ganar un partido anotando varias carreras. Si el triple del cuadrado del número de carreras que anotó Luis es igual a doce, ¿cuántas carreras anotó Luis?

$$3x^2 = 12$$

4. Un terreno mide 6 metros más de largo que de ancho. Si la superficie del terreno es de 520 m², ¿cuánto mide de largo?, ¿cuánto mide de ancho?

$$\frac{520}{(x+6)} x$$

Temas relacionados: Factorización, Raíz cuadrada
Despeje de fórmulas

BLOQUE III

Geometría

LECCIÓN

1

Congruencia de triángulos

Casos de igualdad de triángulos.

1. Criterio *LLL*

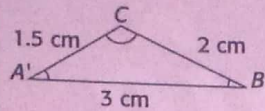
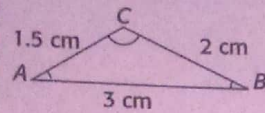
Dos triángulos son iguales si tienen sus tres lados iguales.

2. Criterio *LAL*

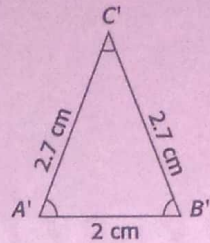
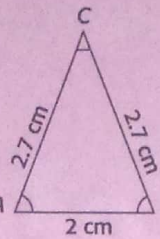
Dos triángulos son iguales si tienen iguales dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

3. Criterio *ALA*

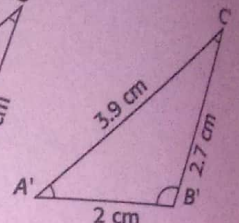
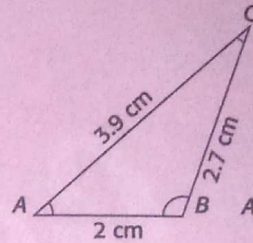
Dos triángulos son iguales si tienen iguales un lado y los ángulos adyacentes a él.



$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \overline{A'B'} \\ \overline{BC} &= \overline{B'C'} \\ \overline{AC} &= \overline{A'C'}\end{aligned}$$



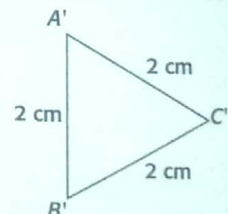
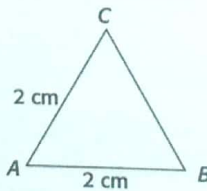
$$\begin{aligned}\overline{AC} &= \overline{A'C'} \\ \overline{BC} &= \overline{B'C'} \\ \angle C &= \angle C'\end{aligned}$$



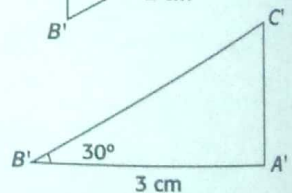
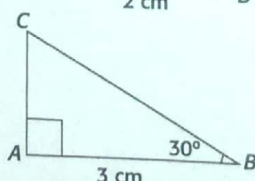
$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \overline{A'B'} \\ \angle A &= \angle A' \\ \angle B &= \angle B'\end{aligned}$$

Relaciona las dos columnas, anotando en el paréntesis de la izquierda el número que corresponde al triángulo de la columna derecha que es congruente al de la columna izquierda. Escribe en la línea bajo el paréntesis el criterio utilizado para determinar la congruencia.

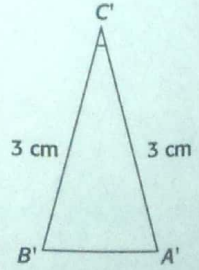
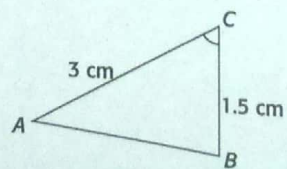
()



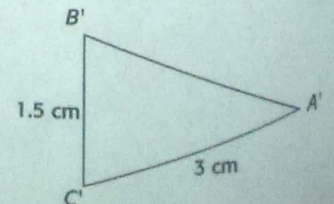
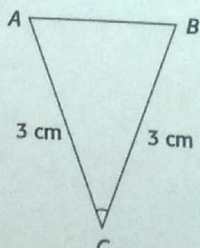
()



()



()



Temas relacionados: Medición de ángulos, Uso de la regla graduada, Equivalencia de figuras

Propiedades de los triángulos

LECCIÓN

2

En un triángulo:

1. Un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que la diferencia.

$$a < b + c \quad b < a + c \quad c < a + b$$

$$a > b - c \quad b > a - c \quad c > a - b$$

2. A mayor lado se opone mayor ángulo y viceversa.

$$\angle C > \angle A \quad \text{entonces} \quad C > A$$

3. La suma de los tres ángulos interiores vale 180° .

$$\angle C > \angle B \quad \text{entonces} \quad C > B$$

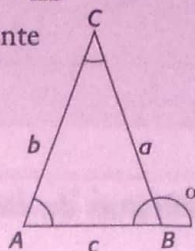
4. Todo ángulo exterior es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes. $\angle \alpha = \angle A + \angle C$

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

5. Si dos lados son iguales, sus ángulos opuestos también lo son y viceversa.

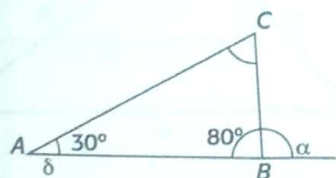
$$a = b \quad \text{entonces} \quad \angle A = \angle B$$

6. La suma de un ángulo exterior y el ángulo interior adyacente a él, es de 180° . $\angle B + \angle \alpha = 180^\circ$



Encuentra los valores indicados en cada triángulo.

a)



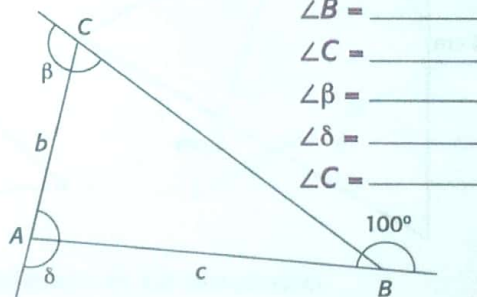
$$\angle C = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\angle \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\angle \beta = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\angle \delta = \underline{\hspace{2cm}}$$

b)



$$\angle B = \underline{\hspace{2cm}}$$

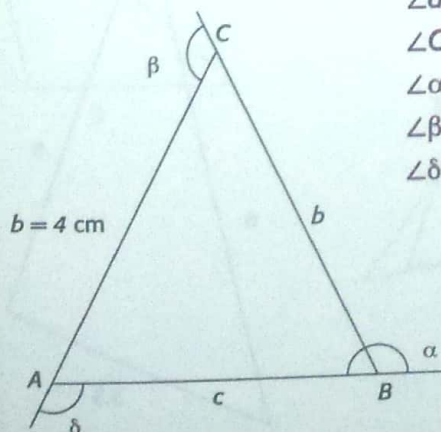
$$\angle C = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\angle \beta = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\angle \delta = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\angle \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$$

c)



$$\angle A = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\angle C = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\angle \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\angle \beta = \underline{\hspace{2cm}}$$

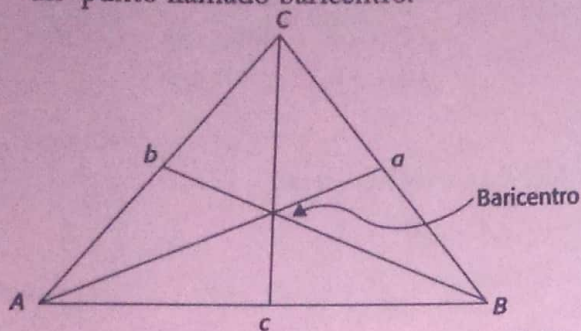
$$\angle \delta = \underline{\hspace{2cm}}$$

LECCIÓN

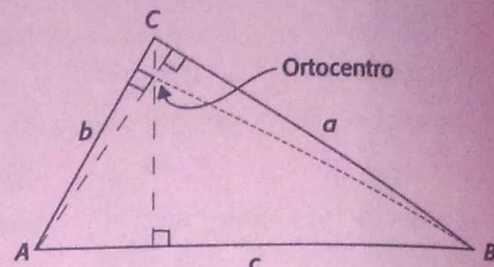
3

Rectas y puntos notables en el triángulo

Mediana: Segmento trazado desde un vértice hasta el punto medio en el lado opuesto. Las tres medianas del triángulo se intersectan en un punto llamado baricentro.

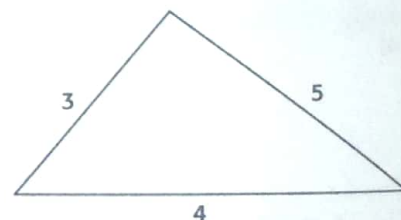
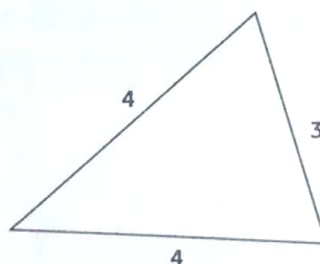
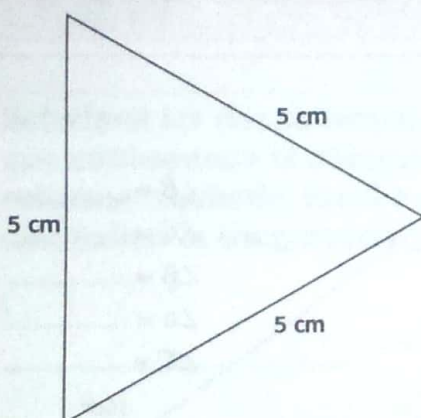


Altura: Es el segmento perpendicular trazado desde un vértice hasta el lado opuesto a su prolongación. Las tres alturas se intersectan en un punto llamado ortocentro.

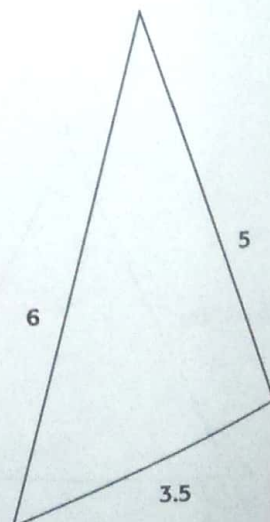
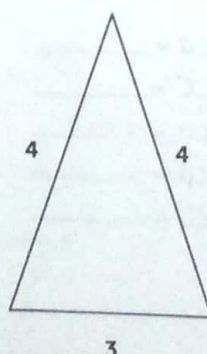
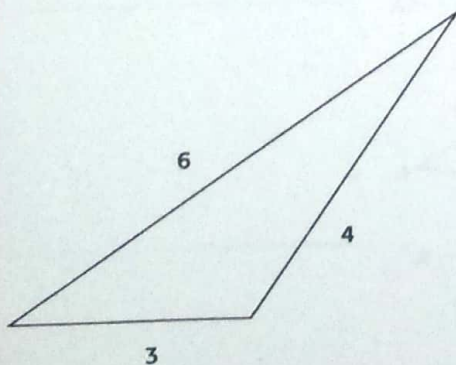


* Baldor, J. A. *Geometría plana y del espacio y Trigonometría*, págs. 56, 57.

Dibuja las tres medianas de cada triángulo señalando el baricentro.



Dibuja las tres alturas de cada triángulo señalando el ortocentro.

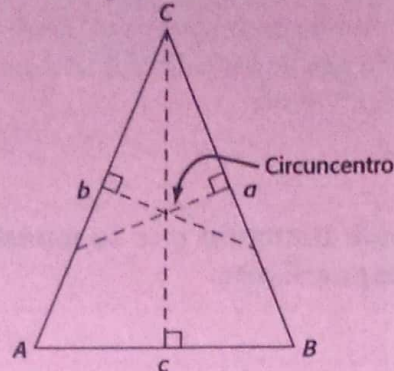
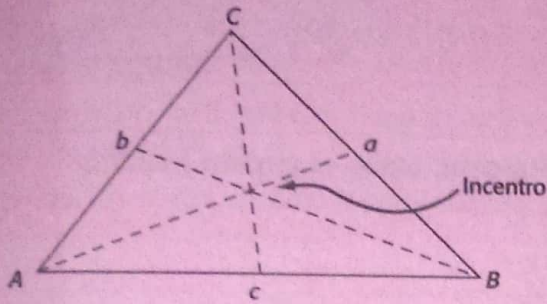


Temas relacionados: Trazo de perpendiculares
Construcciones geométricas

Rectas y puntos notables en el triángulo (continuación)

Bisectriz: Es el segmento que divide a un ángulo interior en dos ángulos iguales. Las tres bisectrices se intersectan en un punto llamado incentro.

Mediatriz: Es el segmento perpendicular trazado en el punto medio de cada lado. Las tres mediatrices se intersectan en un punto llamado circuncentro.

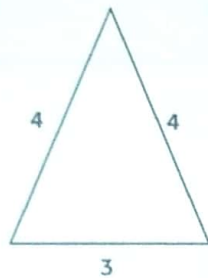
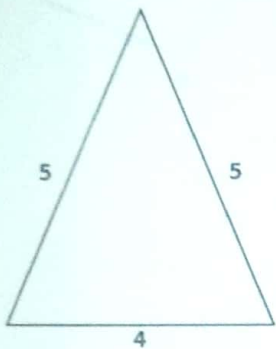


Baldor, J. A. *Geometría plana y del espacio y Trigonometría*, págs. 57.

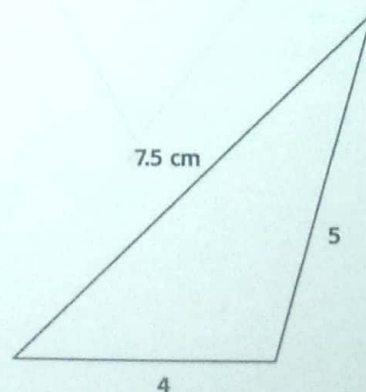
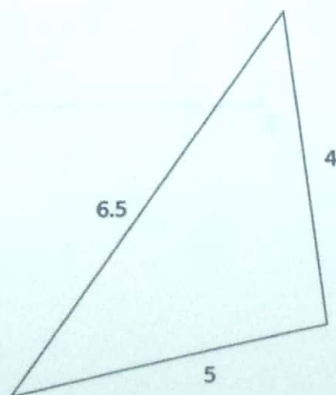
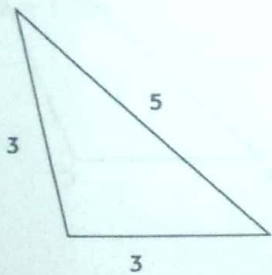
LECCIÓN

3

Dibuja las tres bisectrices de cada triángulo señalando el incentro.



Dibuja las tres mediatrices de cada triángulo señalando el circuncentro.



Geometría

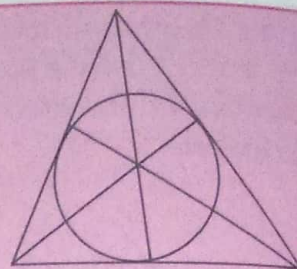
LECCIÓN

3

Rectas y puntos notables en el triángulo (continuación)

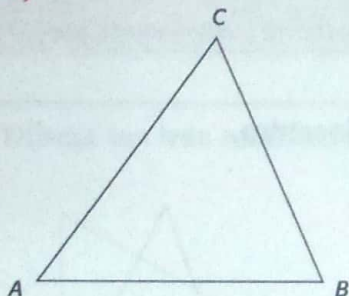
Trazo de un círculo inscrito en un triángulo.

1. Se trazan las medianas de los lados del triángulo.
2. Apoyando el compás en el incentro y abriéndolo hasta una de los lados del triángulo, se traza la circunferencia.

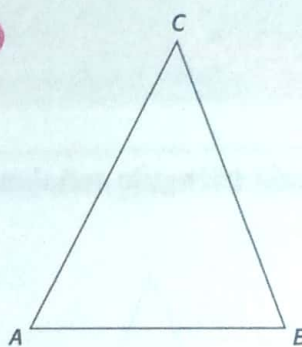


En cada triángulo que se muestra a continuación, traza el círculo inscrito correspondiente.

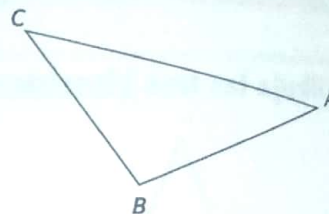
a)



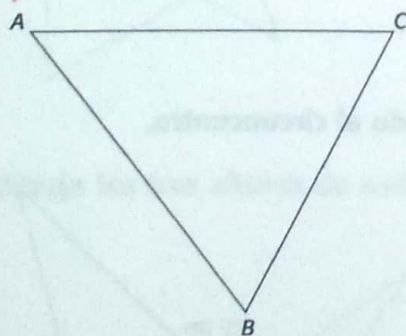
b)



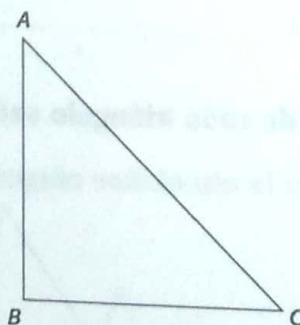
c)



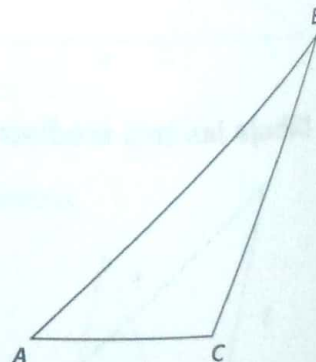
d)



e)



f)



Construcción de triángulos

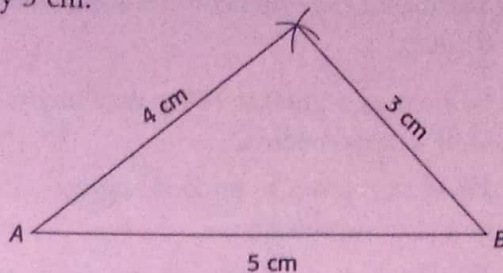
LECCIÓN

4

Dados los tres lados.

Construir un triángulo cuyos lados midan 3 cm, 4 cm y 5 cm.

1. Se traza el segmento AB , generalmente el de mayor medida.
2. Apoyando en A , se abre el compás hasta 4 cm y se traza un arco.
3. Apoyando en B , se abre el compás hasta 3 cm y se traza un arco.
4. Se unen A y B con el punto de intersección de los arcos.



Traza los siguientes triángulos, conocidos sus tres lados.

a) 4 cm, 5 cm, 7 cm

b) 3 cm, 6 cm, 5 cm

c) 2 cm, 2 cm, 3 cm
 $b = 1$ cm

d) 4 cm, 4 cm, 4 cm

Geometría

LECCIÓN

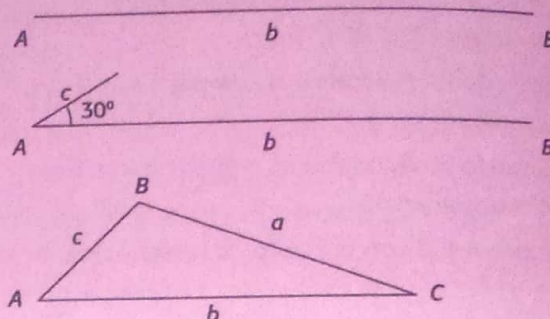
4

Construcción de triángulos (continuación)

Dados dos lados y el ángulo entre ellas.

Construir un triángulo con dos lados que miden 2 cm y 5 cm cada uno, y el ángulo entre ellos mide 30° .

1. Se traza el segmento AB , generalmente el de mayor medida.
2. En el extremo A se mide el ángulo con el transportador.
3. Partiendo de A , se traza el otro segmento de medida dada (extremo C).
4. Se une el punto B con el punto C .



Construye los siguientes triángulos, dados dos lados y el ángulo entre ellos.

a) $\angle A = 50^\circ$
 $b = 5 \text{ cm}$
 $c = 3 \text{ cm}$

b) $\angle A = 60^\circ$
 $b = 3 \text{ cm}$
 $c = 4 \text{ cm}$

c) $\angle B = 60^\circ$
 $a = 4 \text{ cm}$
 $c = 4 \text{ cm}$

d) $\angle C = 80^\circ$
 $a = 7 \text{ cm}$
 $b = 7 \text{ cm}$

Construcción de triángulos (continuación)

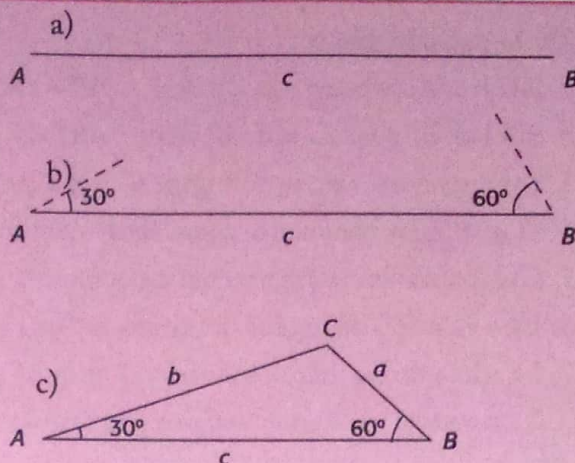
Dados dos ángulos y el lado comprendido entre ellos.

$$A = 30^\circ$$

$$B = 60^\circ$$

$$c = 4 \text{ cm}$$

1. Se traza el segmento AB .
2. Se miden los dos ángulos dados con el transportador, uno en cada extremo del segmento trazado.
3. Se trazan los dos segmentos que faltan hasta el punto donde se intersectan (C).



Construye los siguientes triángulos, conocidos dos ángulos y el lado comprendido entre ellos.

a) $\angle A = 20^\circ$

$$\angle B = 50^\circ$$

$$c = 3 \text{ cm}$$

b) $\angle B = 30^\circ$

$$\angle C = 70^\circ$$

$$a = 4 \text{ cm}$$

c) $\angle A = 40^\circ$

$$\angle C = 60^\circ$$

$$b = 5 \text{ cm}$$

d) $\angle A = 50^\circ$

$$\angle B = 50^\circ$$

$$c = 4 \text{ cm}$$

LECCIÓN

4

Geometría

LECCIÓN

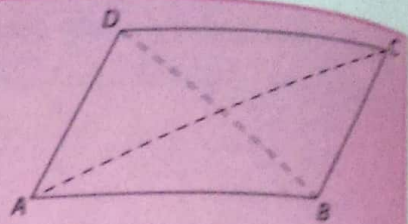
5

Geometría

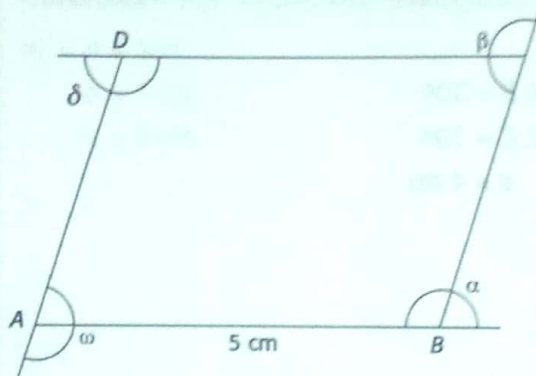
Propiedades de los paralelogramos

En un paralelogramo

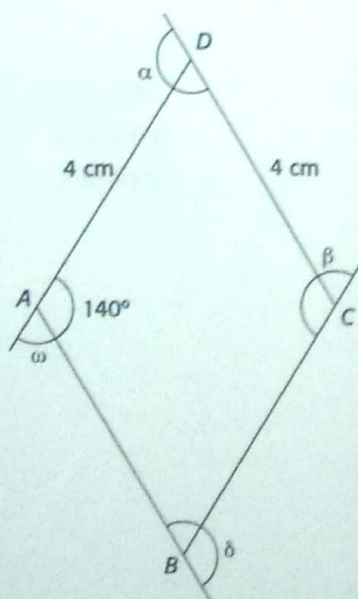
1. Sus lados opuestos son iguales. $\overline{AB} = \overline{CD}$ $\overline{AD} = \overline{BC}$
2. Sus lados opuestos son paralelos. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
3. Sus ángulos opuestos son iguales. $\angle A = \angle C$ $\angle B = \angle D$
4. Dos ángulos consecutivos son suplementarios. $\angle A + \angle B = 180^\circ$, $\angle B + \angle C = 180^\circ$
5. Las diagonales se intersectan exactamente a la mitad.
6. La suma de los ángulos interiores es igual a 360° . $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$
7. La suma de los ángulos exteriores es igual a 360° . $\angle \alpha + \angle \beta + \angle \delta + \angle \omega = 360^\circ$
8. La suma de un ángulo exterior y el ángulo interior adyacente a él es de 180° .



Encuentra los valores indicados.



- $\angle B =$
- $\angle C =$
- $\angle D =$
- $\overline{CD} =$
- $\overline{AD} =$
- $\angle \alpha =$
- $\angle \beta =$
- $\angle \delta =$
- $\angle \omega =$



- $\angle B =$
- $\angle C =$
- $\angle D =$
- $\overline{AB} =$
- $\overline{CD} =$
- $\angle \alpha =$
- $\angle \beta =$
- $\angle \delta =$
- $\angle \omega =$

Temas relacionados: Ángulos interiores y exteriores
Paralelas

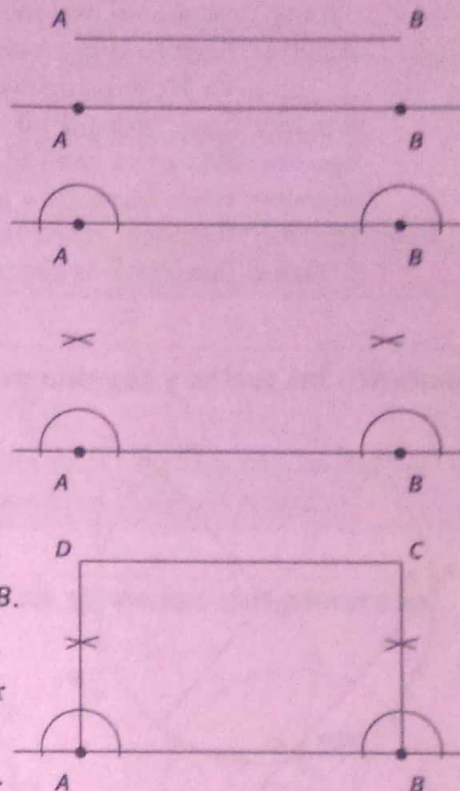
Construcción de paralelogramos

LECCIÓN

6

Trazar un rectángulo cuyos lados miden 4 y 2 cm.

1. Se traza el segmento AB , generalmente el de mayor medida.
2. En A y B se trazan prolongaciones al segmento AB , de cualquier medida.
3. Apoyando en A y abriendo el compás a cualquier medida, se traza un arco que corte el segmento y a su prolongación se repite el proceso en B .
4. Apoyando el compás en las dos intersecciones y abriéndola a cualquier medida, se trazan dos arcos que se intersectan. Se repite el proceso en B .
5. Se traza un segmento que parta de A y pase por la intersección de los arcos. Se repite el proceso en B . Dicho segmento debe tener la medida del lado faltante.
6. Se unen los extremos resultantes (C y D) para completar el rectángulo.
7. En el rombo y el romboide se omiten los pasos 2, 3 y 4. En su lugar, se traza el ángulo correspondiente.



Construye los paralelogramos que se indican a continuación.

a) Cuadrado de 4 cm por lado.

b) Rectángulo cuyos lados midan 3 cm y 2 cm.

a) Rombo de 3 cm por lado a y ángulo interior de 60° .

b) Romboide cuyos lados midan 4 cm y 3 cm y un ángulo interior de 30° .

LECCIÓN

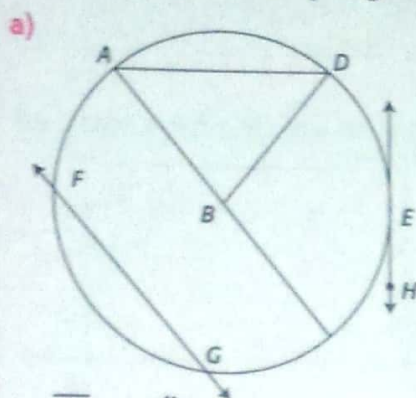
1

Geometría

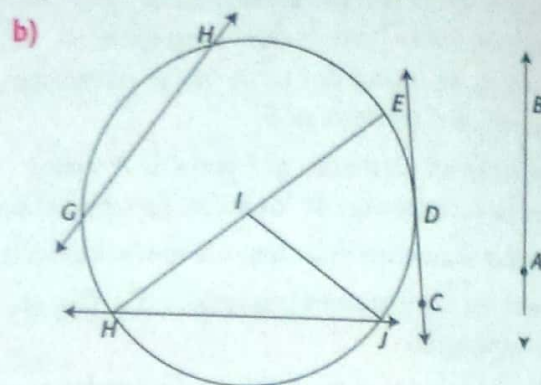
Recta y segmentos notables

- Radio:** Segmento que une cualquier punto de la circunferencia con su centro.
Diámetro: Segmento que une dos puntos de la circunferencia y que pasa por su centro. Es la cuerda de mayor longitud.
Cuerda: Segmento que une dos puntos de la circunferencia.
Secante: Recta que corta a la circunferencia en dos puntos.
Tangente: Recta que corta a la circunferencia en un punto. Es perpendicular al radio.
Recta exterior: Recta que no corta a la circunferencia.
Arco: Porción de la circunferencia comprendida entre dos puntos de la misma.

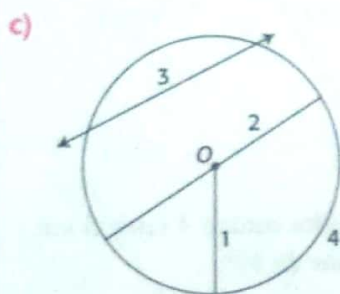
Identifica las rectas y segmentos notables que se indican en cada figura.



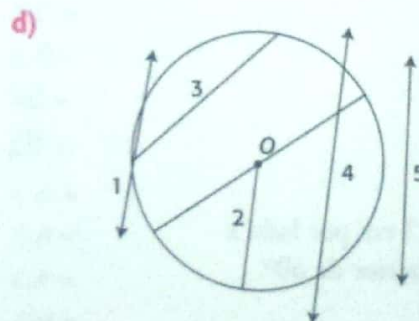
$\overline{AB}$ radio _____
 $\overline{BD}$ _____
 $\overline{AC}$ _____
 $\overleftrightarrow{FG}$ _____
 $\overleftrightarrow{EH}$ _____
 $\overline{BC}$ _____
 $\overline{AD}$ _____
 $\overline{AD}$ _____



$\overleftrightarrow{AB}$ _____
 $\overleftrightarrow{CD}$ _____
 $\overleftrightarrow{HJ}$ _____
 $\overleftrightarrow{IJ}$ _____
 $\overline{EH}$ _____
 $\overline{FG}$ _____
 $\widehat{EF}$ _____
 $\widehat{HI}$ _____



- () Diámetro
 () Arco
 () Radio
 () Secante



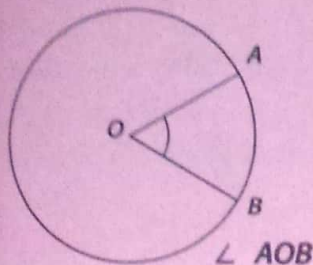
- () Tangente
 () Cuerda
 () Recta exterior
 () Radio
 () Secante

Temas relacionados: Círculo

Ángulos en el círculo

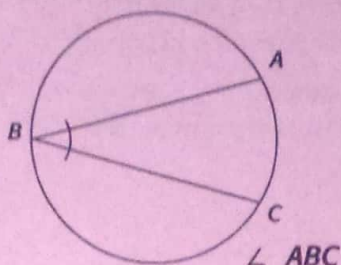
Ángulo central

Abertura formada por dos radios; el vértice es el centro de la circunferencia.


 $\angle AOB$

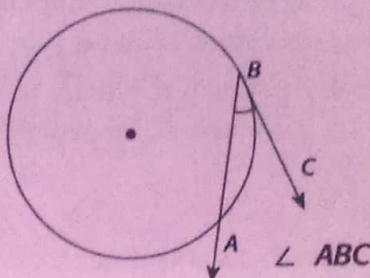
Ángulo inscrito

Abertura formada por dos cuerdas; el vértice es un punto de la circunferencia.


 $\angle ABC$

Ángulo semiinscrito

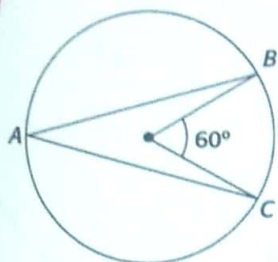
Abertura formada por una secante y una tangente; el vértice es un punto de la circunferencia.


 $\angle ABC$

• Si los lados de un ángulo inscrito y un ángulo central cortan a la circunferencia en los mismos puntos, entonces el ángulo inscrito mide la mitad de la que mide el ángulo central.

Encuentra el valor de los ángulos que se indican en las siguientes circunferencias.

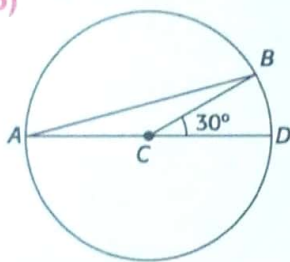
a)



$\angle BAC =$

$\angle BDC = 60^\circ$

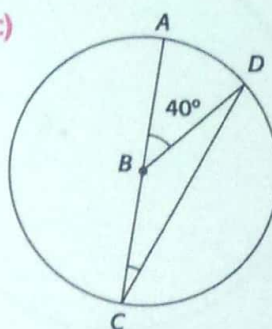
b)



$\angle BAD =$

$\angle BCD = 30^\circ$

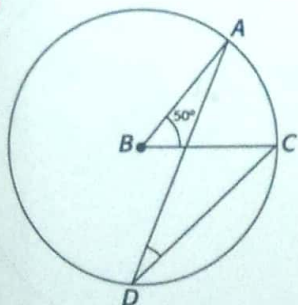
c)



$\angle ACD =$

$\angle ABD = 40^\circ$

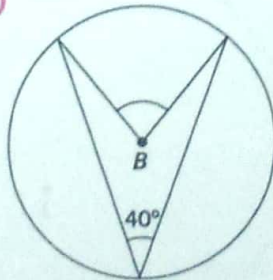
d)



$\angle ADC =$

$\angle ABC = 50^\circ$

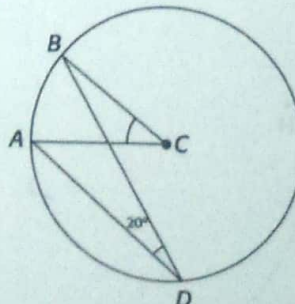
e)



$\angle ABC =$

$\angle ADC = 40^\circ$

f)



$\angle ACB =$

$\angle ADB = 20^\circ$

LECCIÓN

2

Geometría

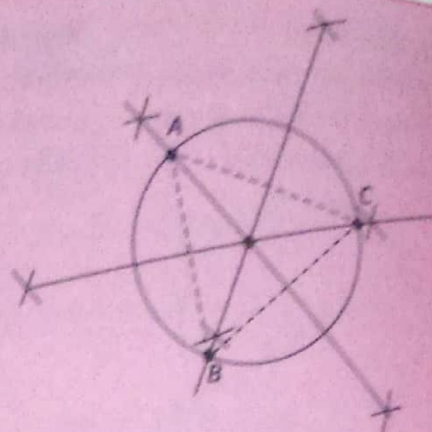
LECCIÓN

3

Construcciones con regla y compás

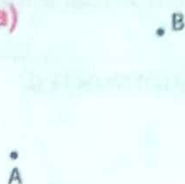
Trazo de un círculo que pasa por tres puntos.

1. Se unen los tres puntos para formar un triángulo.
2. Se trazan las mediatrices para cada lado del triángulo.
3. El circuncentro (punto de intersección de las tres mediatrices) será el centro de la circunferencia.
4. Apoyando el compás en el circuncentro y abriéndolo hasta uno de los puntos, se traza la circunferencia.



Traza las circunferencias que pasen por los puntos indicados en cada ejercicio.

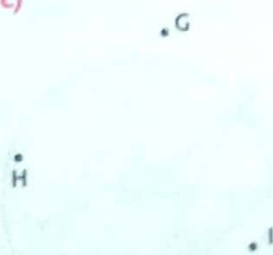
a)



b)



c)



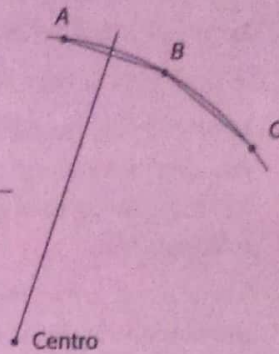
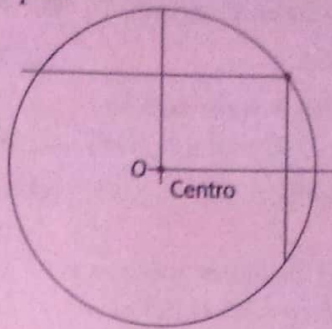
d)



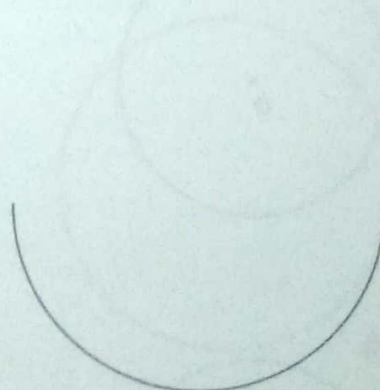
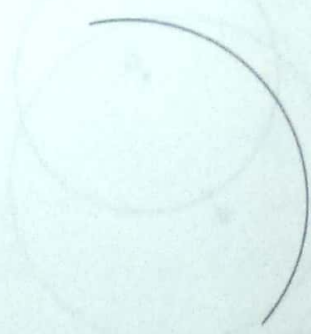
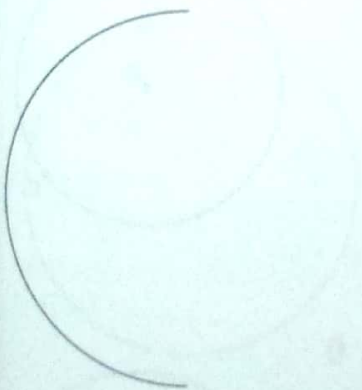
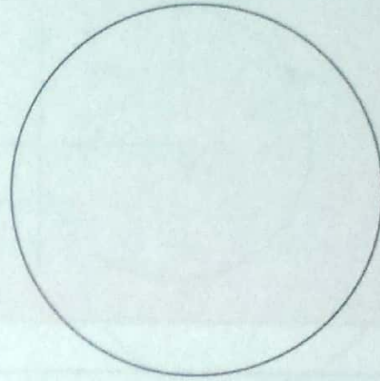
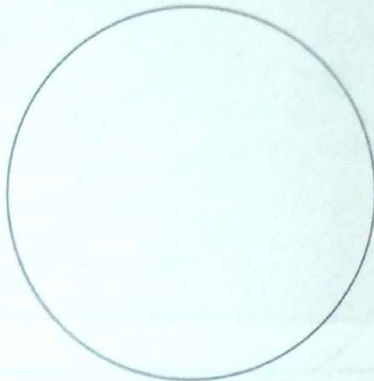
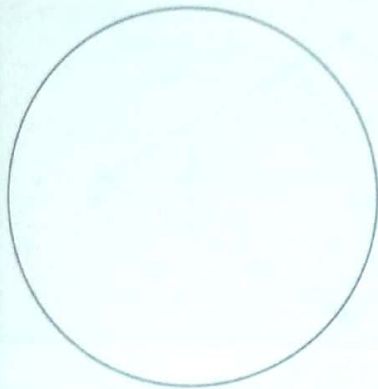
Construcciones con regla y compás (continuación)

Localización del centro de un círculo o arco de círculo:

1. Se escogen tres puntos del círculo y se unen para formar dos segmentos.
2. Se traza la mediatriz para cada segmento.
3. El punto de intersección de las mediatrices es el centro del círculo.
4. Para localizar el centro del arco de círculo se sigue el mismo proceso.



Localiza el centro de los círculos o arcos de círculo que se muestran a continuación.



Temas relacionados: Círculo, Trazo de mediatrices
Construcciones geométricas

LECCIÓN

3

Geometría

LECCIÓN

3

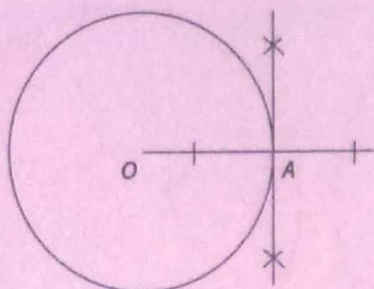
Geometría

Construcciones con regla y compás (continuación)

Trazo de rectas tangentes al círculo.

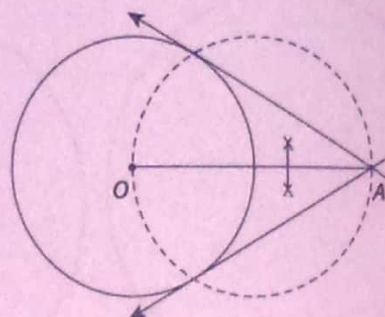
I. Por un punto A en la circunferencia.

1. Se prolonga el radio OA .
2. Apoyando el compás en A y abriéndolo a una abertura menor que al radio, se traza un arco que corte al radio y a su prolongación.
3. Abriendo el compás a cualquier abertura y apoyándolo en las intersecciones del arco con el radio y su prolongación, se traza la mediatriz del segmento.
4. La mediatriz es la recta tangente al círculo.

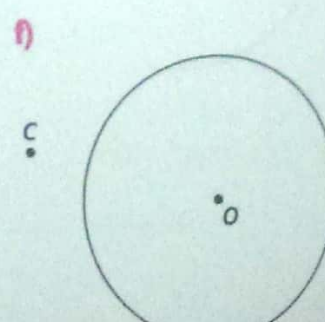
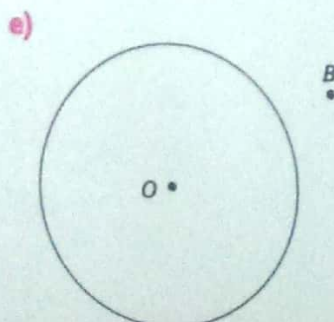
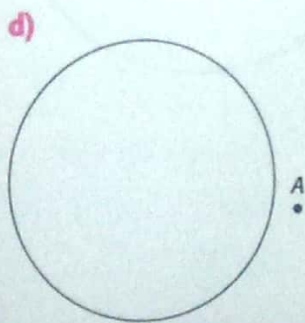
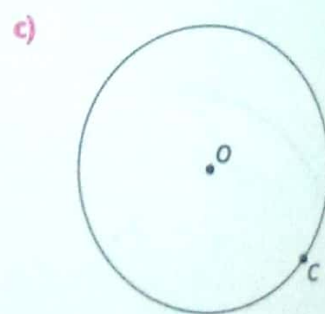
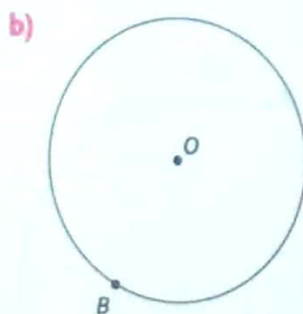
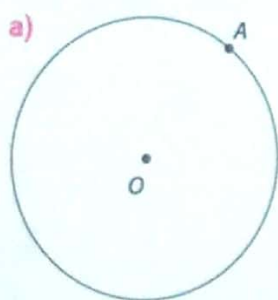


II. Por un punto A exterior a la circunferencia.

1. Se traza un segmento que una al centro del círculo con el punto A .
2. Se traza la mediatriz del segmento OA .
3. Apoyando el compás en la intersección de la mediatriz con el segmento OA y abriéndolo hasta el punto A , se traza una circunferencia que se intersecta con la primera.
4. Los puntos de intersección se unen con el punto A . Son dos las rectas tangentes que se pueden trazar por un punto exterior a una circunferencia.



Traza la recta tangente a cada una de las siguientes circunferencias en los puntos indicados.



Temas relacionados: Círculo, Construcciones geométricas, Trazo de mediatrices

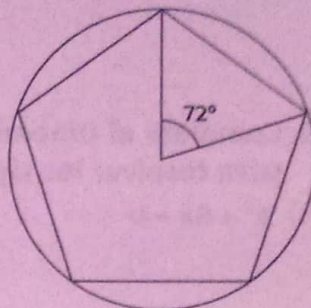
Construcciones con regla y compás (continuación)

Trazo de polígonos inscritos en un círculo.

1. Se dividen los 360° del círculo entre el número de lados del polígono a trazar

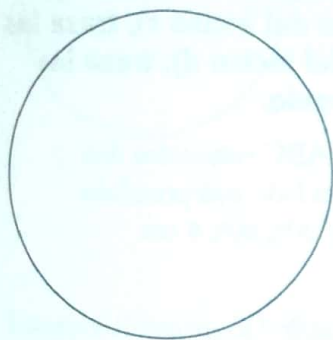
$$\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

2. Se traza un ángulo central de la medida indicada (72°).
3. Con el compás y tomando la medida del arco, se divide la circunferencia en cinco partes iguales.
4. Se unen los puntos para formar el polígono.

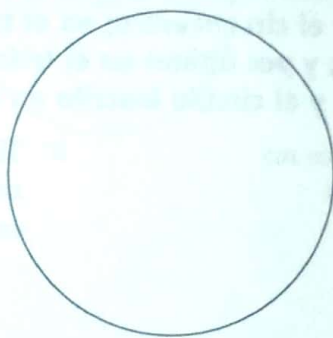


Traza los polígonos inscritos en el círculo que se indica a continuación.

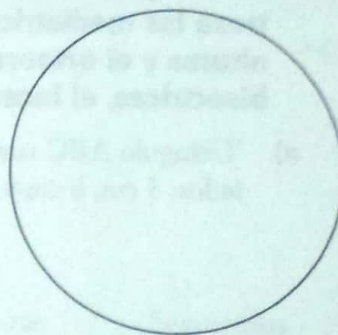
a) Hexágono



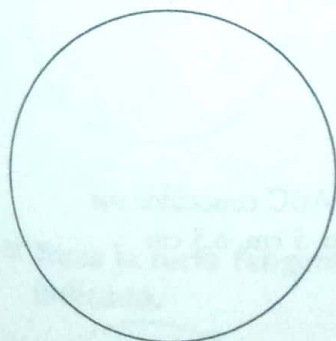
b) Eptágono



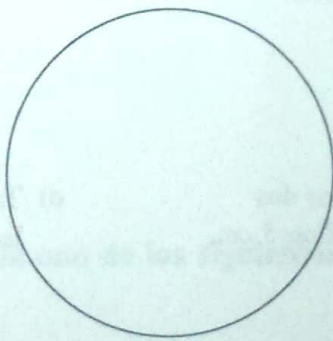
c) Octágono



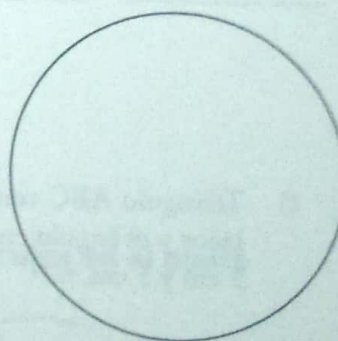
d) Eneágono



e) Decágono



f) Dodecágono



LECCIÓN

4

Geometría

I. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado por factorización.

- a) $5x^2 - 3x = 0$ b) $3x^2 - 12 = 0$ c) $4a^2 - 5a + 6 = 0$ d) $a^2 - 3a - 28 = 0$

II. Completa el trinomio cuadrado perfecto y luego utiliza la fórmula general para resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado. Compara.

- a) $x^2 + 8x = 0$ b) $3x^2 + 5x + 2 = 0$

III. Traza los triángulos que se indican en cada inciso. Además en el triángulo del inciso a), traza las medianas y el baricentro; en el triángulo del inciso b), traza las mediatrices y el circuncentro; en el triángulo del inciso c), traza las alturas y el ortocentro; y por último en el triángulo del inciso d), traza las bisectrices, el incentro y el círculo inscrito en el triángulo.

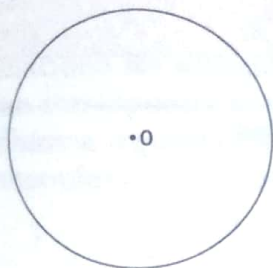
- a) Triángulo ABC conocidos sus lados: 5 cm, 6 cm y 3 cm
- b) Triángulo ABC conocidos dos ángulos y el lado comprendido entre ellos: 30° , 60° , 4 cm
- c) Triángulo ABC conocidos dos lados y el ángulo entre ellos: 5 cm, 5 cm y 60°
- d) Triángulo ABC conocidos sus lados: 4 cm, 5 cm, 6.5 cm

IV. Construye las siguientes figuras geométricas.

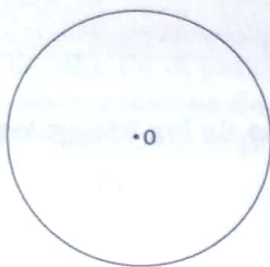
a) Cuadrado de 2.5 cm por lado

b) Rectángulo de 5 cm x 3 cm

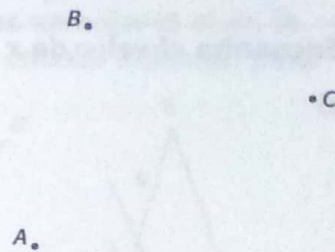
c) Pentágono inscrito



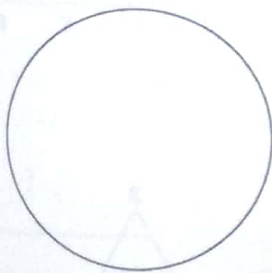
d) Hexágono inscrito



e) Círculo que pasa por A, B y C.
Traza en él las rectas y segmentos notables del círculo.

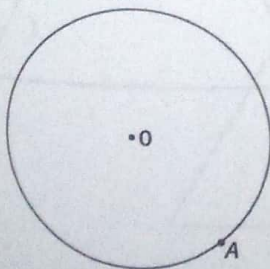


f) Localiza el centro del círculo.

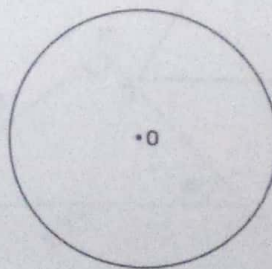


Rectas	Segmentos
_____	_____
_____	_____
_____	_____

V. Traza la recta tangente a cada uno de los siguientes círculos en el punto indicado.



B



LECCIÓN

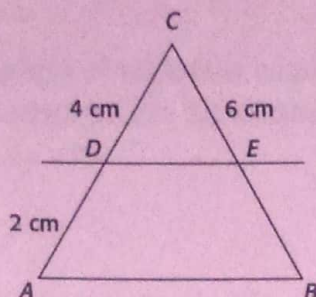
1

Geometría

Semejanza de triángulos

Teorema de Tales:

Toda paralela a un lado de un triángulo divide a los otros dos lados en segmentos proporcionales.



$$\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{EC}$$

$$\frac{2+4}{4} = \frac{6+x}{6}$$

$$\frac{6}{4} = \frac{6+x}{6}$$

$$6(6) = 4(6+x)$$

$$36 = 24 + 4x$$

$$36 - 24 = 4x$$

$$12 = 4x$$

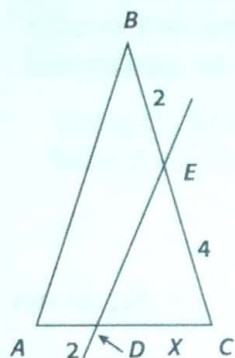
$$\frac{12}{4} = x$$

$$3 = x$$

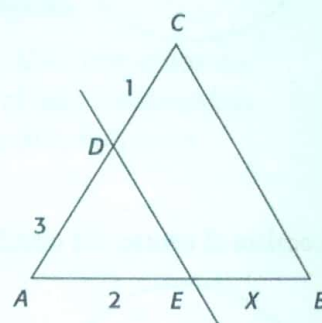
* Baldor, J. A. *Geometría plana y del espacio y Trigonometría*, pág. 94.

Encuentra el valor de x en cada uno de los triángulos indicados.

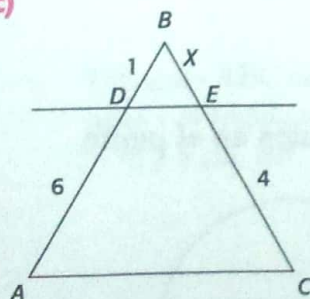
a)



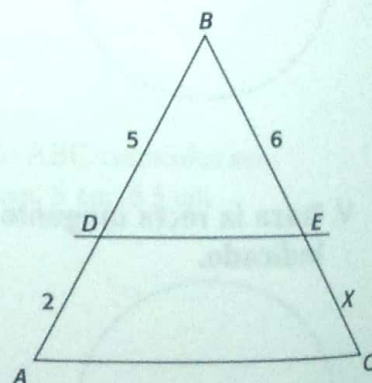
b)



c)



d)



Temas relacionados: Ecuaciones lineales

Semejanza de triángulos (continuación)

LECCIÓN

6

Criterios de semejanza de triángulos. Dos triángulos serán semejantes:

1. Criterio AAA

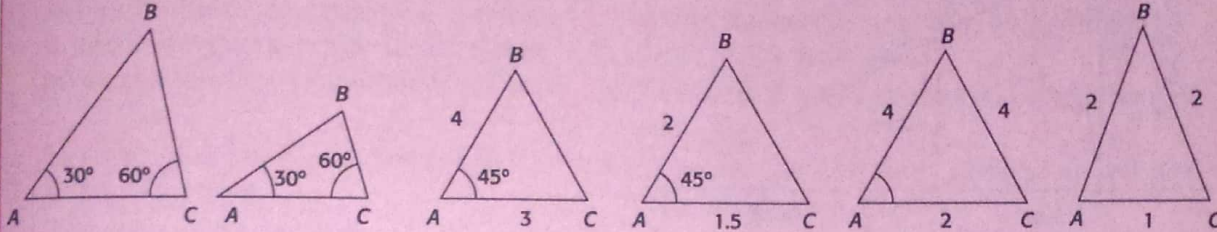
Si tienen tres ángulos iguales cada uno.

2. Criterio LAL

Si tienen dos lados proporcionales e igual el ángulo comprendido entre ellos.

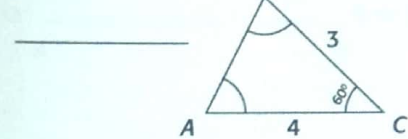
3. Criterio LLL

Si tienen sus tres lados proporcionales.

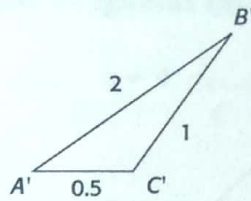


Relaciona las dos columnas. Escribe en el paréntesis de la izquierda el número que corresponda al triángulo de la columna derecha que es semejante al de la columna izquierda. Anota en la línea bajo el paréntesis el criterio utilizado para determinar la semejanza.

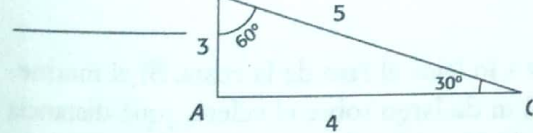
()



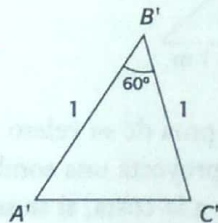
1.



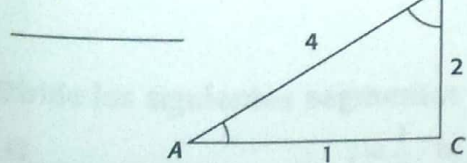
()



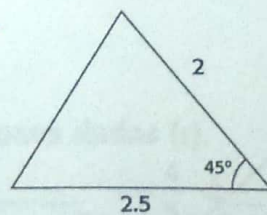
2.



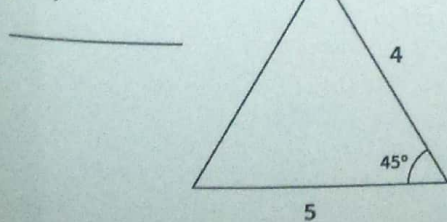
()



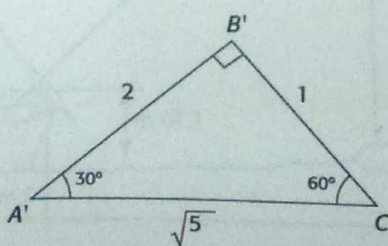
3.



()



4.



Geometría

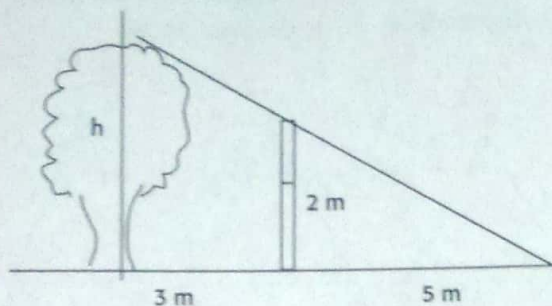
LECCIÓN

1

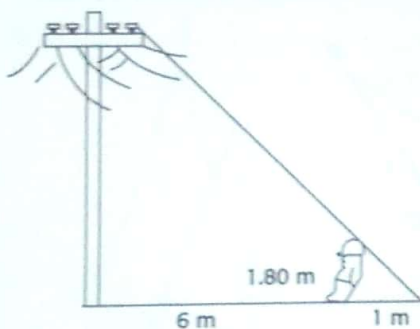
Geometría

Semejanza de triángulos (continuación)

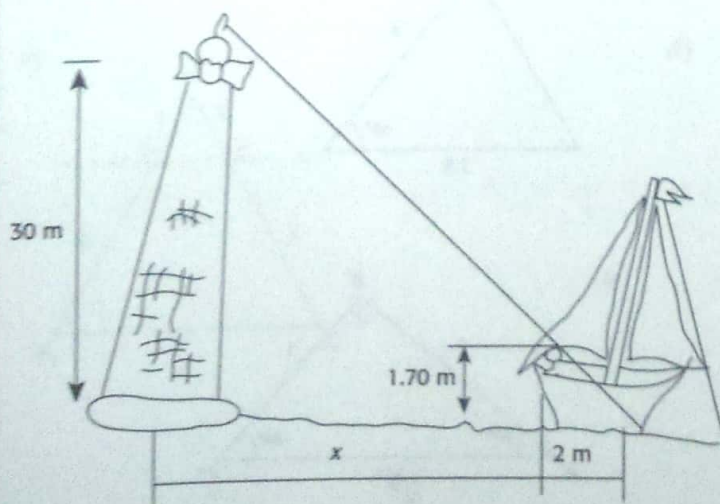
1. A 3 metros de una barda de 2 metros de altura se encuentra un árbol. Si a determinada hora de la tarde la barda proyecta una sombra de 5 m de largo, ¿cuál es la altura del árbol?



2. Un trabajador de la CFE parado a 6 m de un poste con cables conductores de energía, proyecta una sombra de 1 metro de largo. ¿Cuál es la altura del poste, si la estatura del trabajador es 1.80 metros?



3. Un marinero parado en la proa de su velero observa a lo lejos el faro de la costa. Si el marinero, de 1.70 m de estatura, proyecta una sombra de 2 m de largo sobre el velero, ¿qué distancia le falta recorrer para llegar a la costa, si se sabe que la altura del faro con respecto al nivel del mar es de 30 metros?



Temas relacionados: Teorema de Tales

Construcciones con regla y compás

LECCIÓN

2

Construcciones con regla y compás.

I. División de un segmento en n partes iguales.

1. Se traza el segmento AB .
2. Se traza un segundo segmento a cualquier ángulo y de cualquier longitud.
3. Abriendo el compás a cualquier abertura, se divide el segundo segmento en tantas partes iguales como se indique ($C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$).
4. La última división (C_n) se une con un segmento al punto B .
5. Se trazan paralelas al segmento BC_n en cada una de las divisiones $C_1, C_2, C_3, \dots$.
Divide el segmento AB en tres partes iguales.

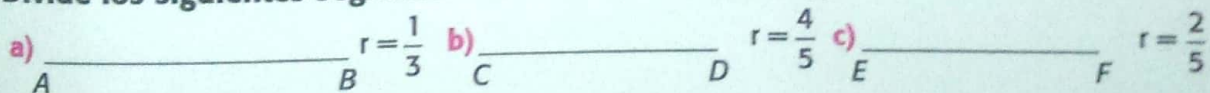
II. División de un segmento en una razón dada.

1. Se traza el segmento AB .
2. Se traza un segundo segmento a cualquier ángulo y de cualquier longitud.
3. Abriendo el compás a cualquier abertura, se divide el segundo segmento en tantas partes como $a + b$ de la razón.
4. La última división se une con un segmento al punto R .
5. Se trazan paralelas a este último segmento en cada una de las divisiones.
6. Se ubica el punto R según la razón dada.
Divide el segmento AB en la razón $\frac{2}{3}$.

Divide los siguientes segmentos en tantas partes iguales (n) como se indica.



Divide los siguientes segmentos en las razones dadas (r).



Geometría

LECCIÓN

2

Geometría

Construcciones con regla y compás (continuación)

Construcción de la cuarta proporcional.
La cuarta proporcional de tres cantidades a, b y c es un valor x que cumple la condición

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Calcula la cuarta proporcional de $a = 2, b = 3$ y $c = 4$

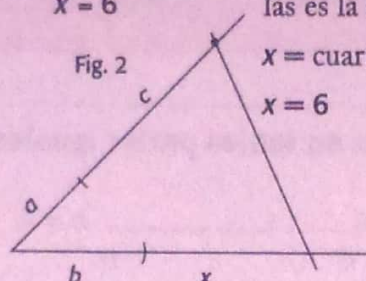
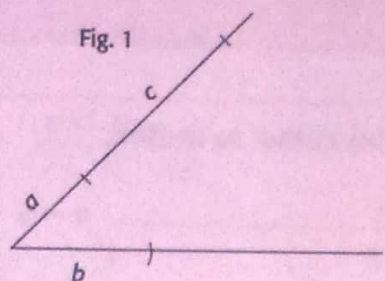
$$\frac{2}{3} = \frac{4}{x}$$

$$2x = 4(3)$$

$$2x = 12$$

$$x = \frac{12}{2}$$

$$x = 6$$



Construir la cuarta proporcional de $a = 2, b = 3$ y $c = 4$

1. Se traza un ángulo de cualquier medida.
2. En un lado del ángulo se traza la longitud de a y en el otro lado del ángulo se traza la longitud b .
3. En el mismo lado del ángulo que a , se traza la longitud de c .
4. Se unen los extremos de la longitud a (punto A) y la longitud b (punto B).
5. Se traza una paralela al segmento AB en el extremo de la longitud C (punto C).
6. El segmento que queda entre las dos paralelas es la cuarta proporcional

$x =$ cuarta proporcional

$x = 6$

Calcula la cuarta proporcional de las cantidades indicadas en cada ejercicio. Utiliza la proporción dada y la construcción geométrica.

- a) $a = 1, b = 2, c = 3$ b) $a = 3, b = 2, c = 6$ c) $a = 2, b = 3, c = 1$ d) $a = 4, b = 6, c = 6$

Construcciones con regla y compás (continuación)

La media proporcional de dos cantidades a y b es un valor x que cumple la condición.

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

Calcula la media proporcional de $a = 1$ y $b = 3$

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{3}$$

$$3(1) = x(x)$$

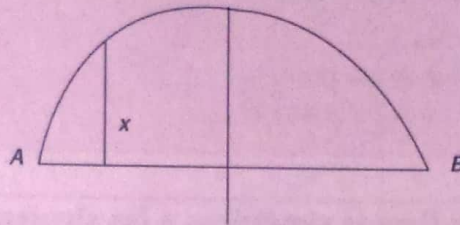
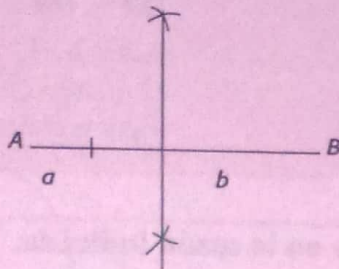
$$3 = x^2$$

$$\sqrt{3} = x$$

$$1,7320 = x$$

Construir la media proporcional de $a = 1$ y $b = 3$

1. Se traza un segmento AB que mide la suma de la longitud a más la longitud b .
2. Se traza la mediatriz del segmento AB .
3. Apoyando el compás en la intersección de la mediatriz con el segmento AB y abriendo el compás hasta un extremo del segmento AB , se traza un semicírculo.
4. Se traza una paralela a la mediatriz en el punto de unión de las dos longitudes a y b .
5. La paralela es la media proporcional.



x = media proporcional
 $x = 1.7$

Calcula la media proporcional de las cantidades indicadas en cada ejercicio. Utiliza la proporción dada y la construcción geométrica.

a) $a = 2, b = 3$

b) $a = 3, b = 4$

c) $a = 2, b = 1$

d) $a = 2, b = 2$

LECCIÓN

2

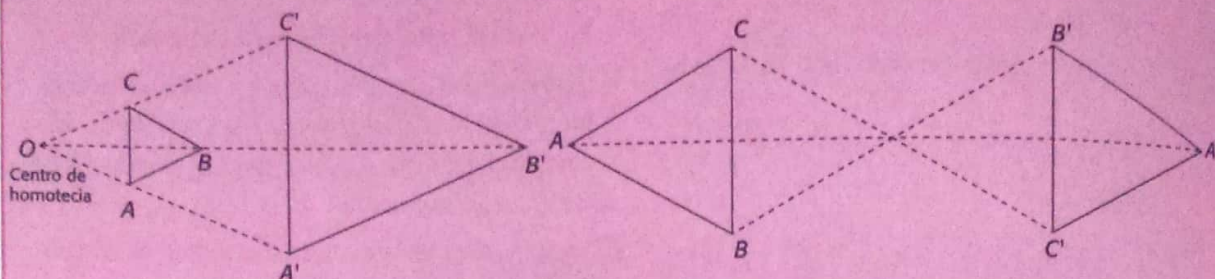
Geometría

LECCIÓN

3

Homotecias

Homotecia: Transformación geométrica utilizada para trazar figuras semejantes y simétricas.
Razón de homotecia: Es la razón de semejanza.



$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} = 3$$

escala 3:1

Homotecia positiva
 (figuras semejantes)

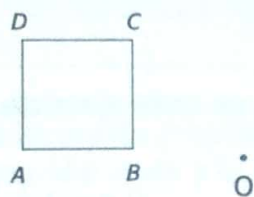
$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} = -1$$

escala 1: -1

Homotecia negativa
 (figuras simétricas y semejantes)

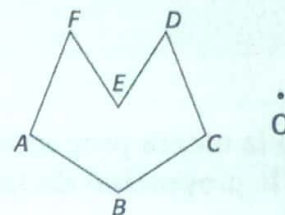
Traza las figuras simétricas a las siguientes en la razón indicada.

a)



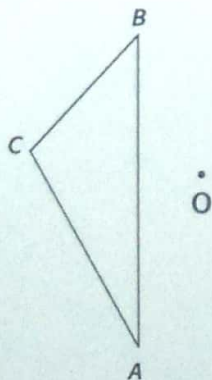
1: -3

b)



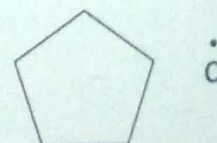
-2: 1

c)



1: -1

d)

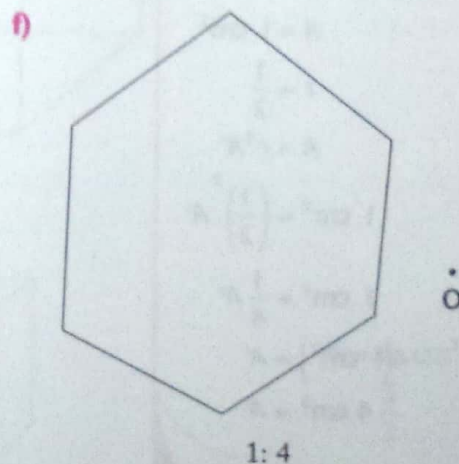
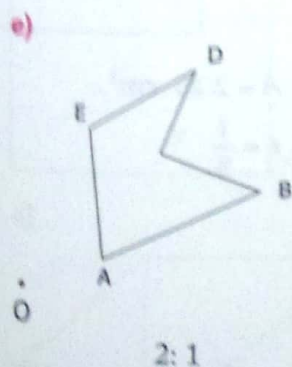
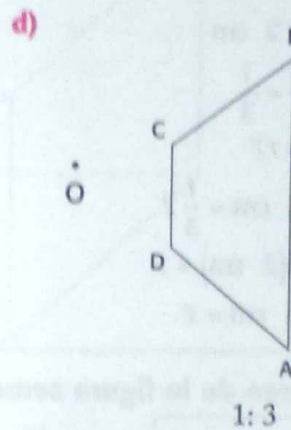
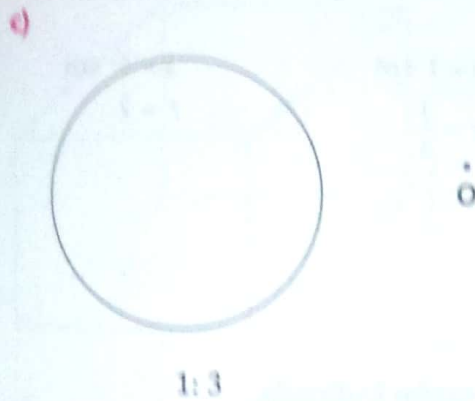
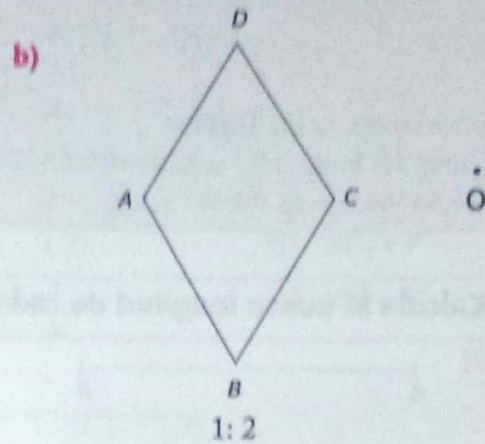
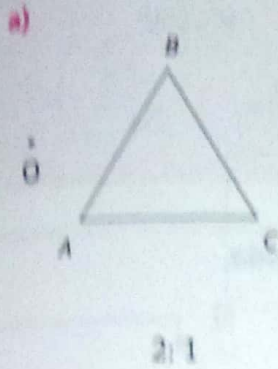


-2: 1

Temas relacionados: Escalas

Homotecias (continuación)

Mediante homotecias, traza la figura semejante a cada una de las que se muestran a continuación, en la escala indicada.



LECCIÓN

4

Efectos de la escala en las magnitudes lineales, el área y el volumen

Longitud $\frac{1}{1'} = r$
 $1 = r1'$

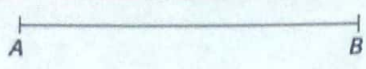
Área $= 1 \cdot 1$
 $A = (r1')(r1')$
 $A = r^2 A'$

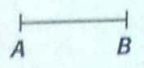
Volumen $V = 1 \cdot 1 \cdot 1$
 $V = (r1')(r1')(r1')$
 $V = r^3 V'$

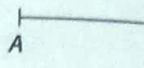
Invariancia de los ángulos

Como las longitudes sólo modifican su medida y no su dirección, los ángulos continúan con su mismo valor.

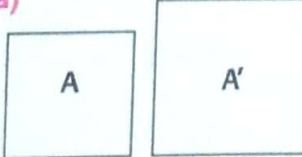
Calcula la nueva longitud de cada segmento. Utiliza la razón dada.

a) 
 $= 2 \text{ cm}$
 $r = \frac{1}{3}$
 $= r1'$
 $2 \text{ cm} = \frac{1}{3} 1'$
 $3(2 \text{ cm}) = 1'$
 $6 \text{ cm} = 1'$

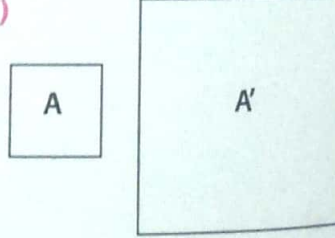
b) 
 $1 = 1 \text{ cm}$
 $r = \frac{1}{4}$

c) 
 $1 = 4 \text{ cm}$
 $r = 2$

Calcula el área de la figura semejante. Utiliza la razón indicada.

a) 
 $A = 1 \text{ cm}^2$
 $r = \frac{1}{2}$
 $A = r^2 A'$
 $1 \text{ cm}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 A'$
 $1 \text{ cm}^2 = \frac{1}{4} A'$
 $4(1 \text{ cm}^2) = A'$
 $4 \text{ cm}^2 = A'$

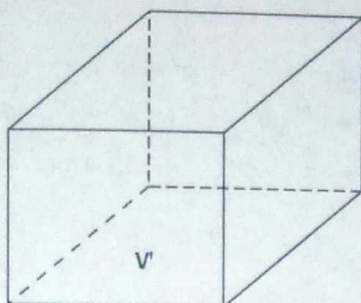
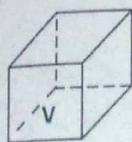
b) 
 $A = 1 \text{ cm}^2$
 $r = \frac{1}{3}$

c) 
 $A = 2.25 \text{ cm}^2$
 $r = \frac{1}{3}$

Efecto de la escala en las magnitudes lineales, el área y el volumen (cont.)

Calcula el área de la figura semejante. Utiliza la razón indicada.

a)



$$V = 1 \text{ cm}^3$$

$$r = \frac{1}{2}$$

$$V = r^3 V'$$

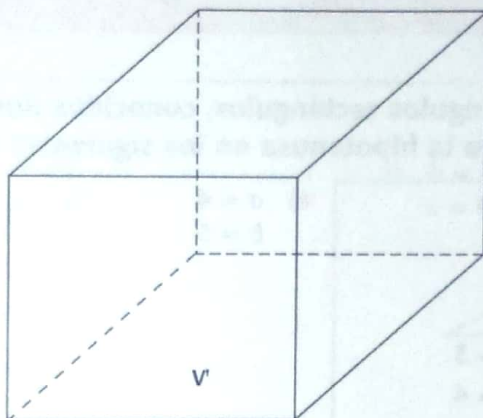
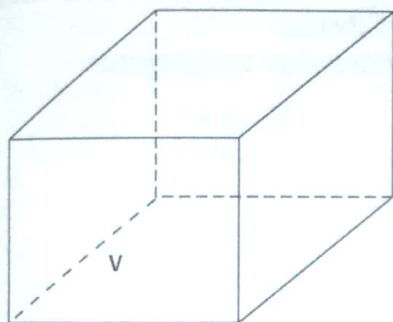
$$1 \text{ cm}^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 V'$$

$$1 \text{ cm}^3 = \frac{1}{8} V'$$

$$8(1 \text{ cm}^3) = V'$$

$$8 \text{ cm}^3 = V'$$

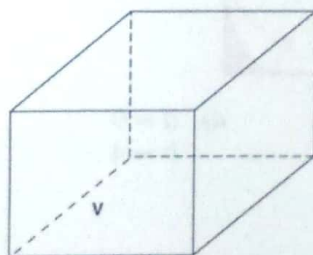
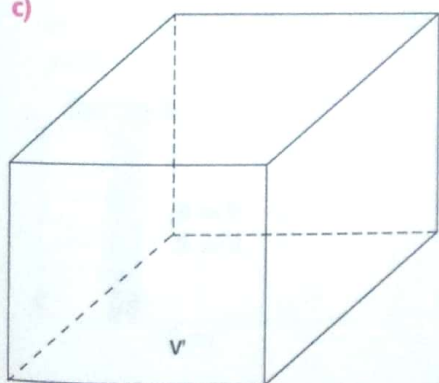
b)



$$V = 8 \text{ cm}^3$$

$$r = \frac{2}{3}$$

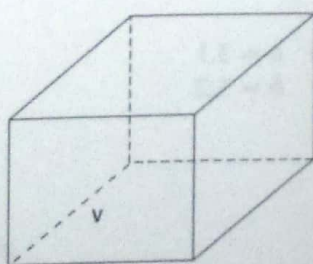
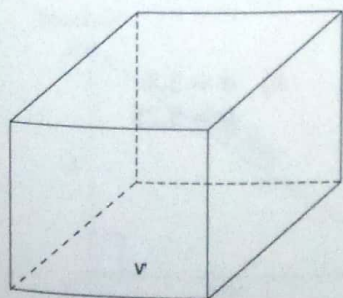
c)



$$V = 27 \text{ cm}^3$$

$$r = 2$$

d)



$$V = 8 \text{ cm}^3$$

$$r = \frac{3}{2}$$

LECCIÓN

4

Geometría

LECCIÓN

1

Teorema de Pitágoras

Teorema de Pitágoras: En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Catetos: Lados que forman el ángulo recto (a y b).

Hipotenusa: Lado que se opone al ángulo recto (c).

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

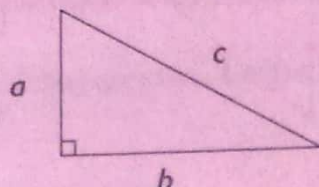
$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$



I. Resolución de triángulos rectángulos, conocidos dos catetos.

Encuentra el valor de la hipotenusa en los siguientes triángulos rectángulos.

$a = 3$
 $b = 4$
 $c^2 = a^2 + b^2$
 $c^2 = (3)^2 + (4)^2$
 $c^2 = 9 + 16$
 $c^2 = 25$
 $c = 5$

a) $a = 4$
 $b = 5$

b) $a = 7$
 $b = 4$

c) $a = 10$
 $b = 8$

d) $a = 9$
 $b = 4$

e) $a = 6$
 $b = 6$

f) $a = 2.5$
 $b = 4$

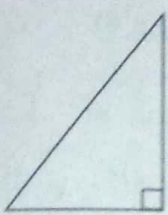
g) $a = 3.1$
 $b = 5.2$

h) $a = 3.4$
 $b = 5.25$

Temas relacionados: Raíz Cuadrada, Sustitución algebraica

Teorema de Pitágoras (continuación)

II. Resolución de triángulos rectángulos dados un cateto y la hipotenusa.



$b = 4$
 $c = 7$
 $a = \sqrt{c^2 - b^2}$
 $a = \sqrt{(7)^2 - (4)^2}$
 $a = \sqrt{49 - 16}$
 $a = \sqrt{33}$
 $a = 5.74$

a) $b = 3$
 $c = 4$

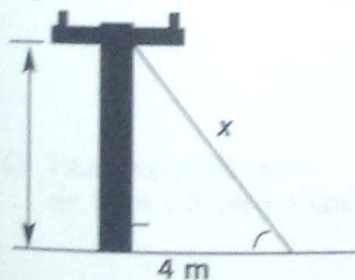
b) $b = 2$
 $c = 5$

c) $b = 5$
 $c = 12$

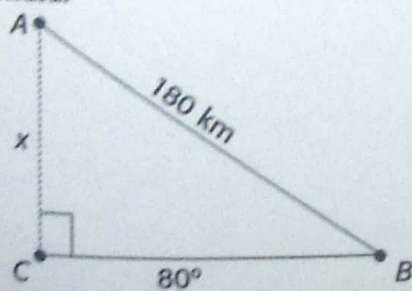
d) $b = 7$
 $c = 11$

e) $b = 4$
 $c = 8$

1. Se instala un poste para cables de energía que mide 8 metros de altura. ¿Qué longitud tiene el cable de acero que se instaló para reforzarlo si el gancho para sujetarlo está a 4 metros del poste?



2. Tres ciudades están unidas por una carretera como se muestra en el diagrama. Si se desea construir una carretera que comunique directamente a la ciudad A con la ciudad C, ¿qué longitud tendrá?



Temas relacionados: Raíz cuadrada, Sustitución algebraica
Plano cartesiano

LECCIÓN

1

Geometría

LECCIÓN

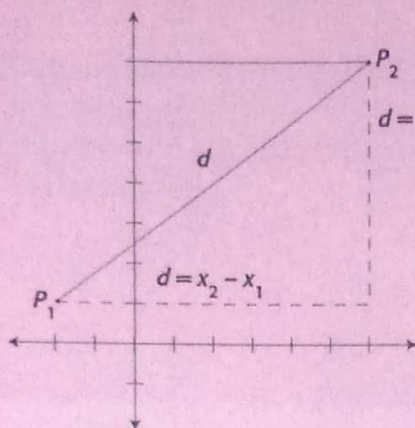
1

Geometría

Teorema de Pitágoras (continuación)

Distancia entre dos puntos del plano cartesiano.

Calcula la distancia entre los puntos cuyas coordenadas son $P_1(-2, 1)$ y $P_2(5, 6)$



$$d^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

$$d = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{[(5) - (-2)]^2 + (6 - 1)^2}$$

$$d = \sqrt{(5 + 2)^2 + (5)^2}$$

$$d = \sqrt{(7)^2 + (5)^2}$$

$$d = \sqrt{49 + 25}$$

$$d = \sqrt{74}$$

$$d = 8.60$$

Encuentra la distancia entre las parejas de puntos que se indican a continuación. Grafica los puntos.

a) $P_1(2, 3)$
 $P_2(5, 5)$

b) $P_1(1, 2)$
 $P_2(-4, 3)$

c) $P_1(2, -3)$
 $P_2(-4, -1)$

d) $P_1(1, -2)$
 $P_2(5, 7)$

Temas relacionados: Raíz cuadrada, Sustitución algebraica, Plano cartesiano

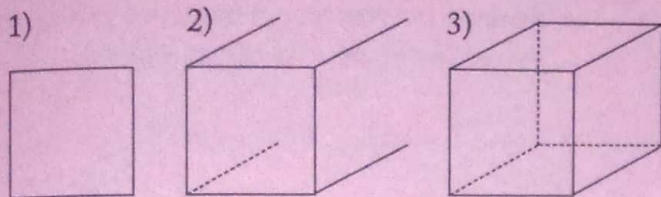
Trazo de cuerpos especiales

LECCIÓN

2

Trazo de cubos.

1. Se traza un cuadrado de la medida dada.
2. Con las escuadras se trazan cuatro segmentos paralelos a 30° en cada vértice del cuadrado y con la misma medida dada. Los segmentos ocultos se trazan con líneas punteadas.
3. Se unen los puntos extremos de los segmentos para formar el cubo.



Trazo de paralelepípedos rectos.

1. Se traza un rectángulo de las medidas dadas.
2. Con las escuadras se trazan cuatro segmentos paralelos a 30° en cada vértice del rectángulo a la medida dada.
3. Se unen los puntos extremos de los segmentos para formar el paralelepípedo recto.

Traza las figuras geométricas que se indican en cada ejercicio.

- a) Cubo de 2 cm por lado. b) Cubo de 3 cm por lado. c) Cubo de 1.5 cm por lado.

- d) Paralelepípedo recto de 1 cm x 2 cm x 2 cm. e) Paralelepípedo recto de 2 cm x 3 cm x 1.5 cm. f) Paralelepípedo recto de 2.5 cm x 1 cm x 3 cm.

LECCIÓN

2

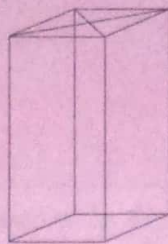
Geometría

Trazo de cuerpos especiales (continuación)

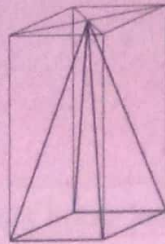
Trazo de una pirámide de base cuadrada.

1. Se traza un paralelepípedo cuya base y altura midan lo mismo que las de la pirámide.
2. En la cara superior del paralelepípedo se trazan las diagonales para encontrar el centro de dicha cara. Ese punto será el vértice de la pirámide.
3. Se une el vértice de la pirámide con las cuatro esquinas del cuadrado de la base.

1 y 2



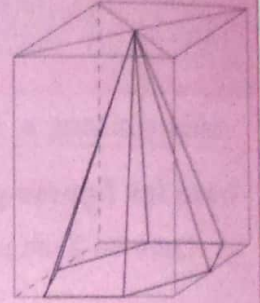
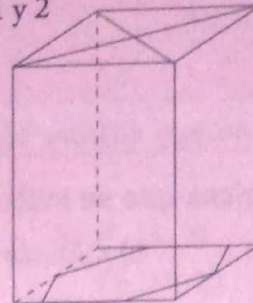
2



Trazo de una pirámide de base hexagonal.

1. Se traza un paralelepípedo con las mismas dimensiones que las de la pirámide.
2. En la cara superior del paralelepípedo se trazan las diagonales para encontrar el punto central de dicha cara, el cual será el vértice de la pirámide.
3. En la cara inferior se traza el hexágono que corresponde a la base de la pirámide.
4. Se unen los vértices del hexágono con el vértice de la pirámide en la cara superior.

1 y 2



Trazo las figuras geométricas que se indican en cada ejercicio.

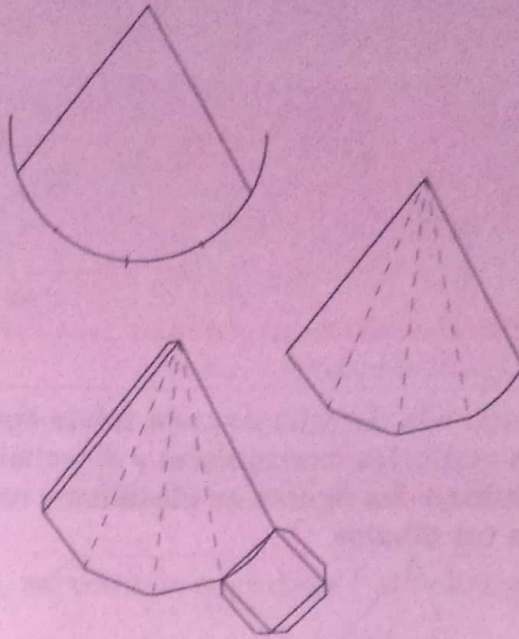
- a) Pirámide de base cuadrada de 2 cm x 2 cm x 3 cm.
- b) Pirámide de base pentagonal en un paralelepípedo recto de 2 cm x 2 cm x 3 cm.
- c) Cono en un paralelepípedo recto de 1.5 cm x 1.5 cm x 3 cm.
- d) Pirámide de base hexagonal en un paralelepípedo recto de 2 cm x 2 cm x 3 cm.

Temas relacionados: Construcciones geométricas
Perspectiva isométrica

Desarrollo y armado de pirámides y conos

Desarrollo de una pirámide de base cuadrada.

1. Se traza una circunferencia con radio igual a la arista de la pirámide.
2. Con el compás, se marcan tantas divisiones iguales como caras laterales tenga la pirámide.
3. El centro de la circunferencia se une con cada división por medio de segmentos.
4. Se unen las divisiones entre sí por medio de segmentos.
5. En la base de una de las caras laterales se traza la base para la pirámide.
6. Añade las "pestañas" suficientes para pegar las caras.
7. Para el cono se sigue un proceso similar, pero más sencillo.



Traza el desarrollo de los siguientes cuerpos. Después, en una cartulina o cartoncillo, arma los cuerpos respectivos. También puedes usar el cartón de las cajas de cereal o similares. Utiliza las dimensiones que consideres más adecuadas.

- | | |
|---|--------------------------------|
| a) Pirámide de base triangular equilátera | b) Pirámide de base pentagonal |
| c) Pirámide de base hexagonal | d) Cono |

LECCIÓN

2

Geometría

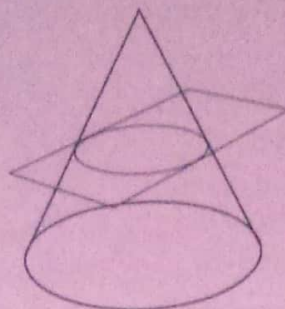
LECCIÓN

3

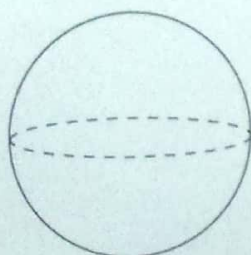
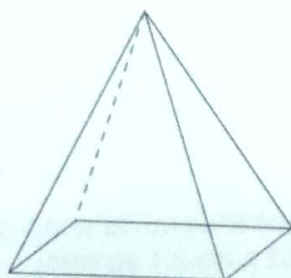
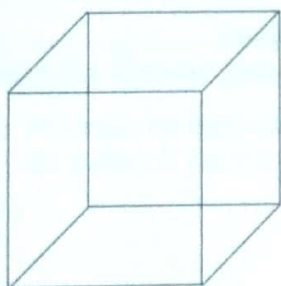
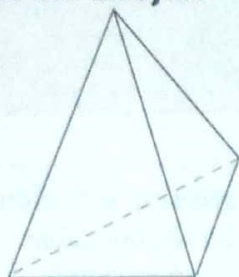
Geometría

Secciones de prismas y pirámides

Un cuerpo puede ser "cortado" en secciones cuando es atravesado por planos imaginarios.



Dibuja a la derecha de cada sólido las secciones que se generan por cortes de planos verticales, horizontales y diagonales. Usa tu imaginación. Posteriormente, construye las figuras en plastilina y realiza los cortes con exactitud, compáralos con tus dibujos.



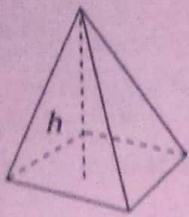
Temas relacionados: Construcciones geométricas

Volumen de pirámides, conos y esferas

LECCIÓN

4

Volumen de pirámides

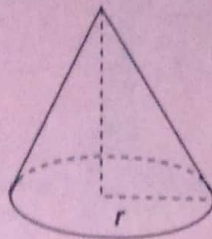


$$V = \frac{Abh}{3}$$

Ab = Área de la base

h = altura de la pirámide

Volumen del cono

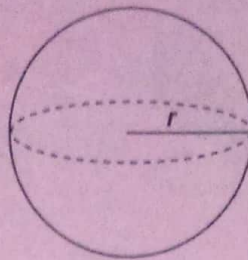


$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

r = radio

$\pi = 3.1416$

Volumen de la esfera



$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

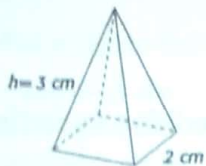
$$V = \frac{Ar}{3}$$

(si el área de la esfera es conocida)

Superficie de la esfera. $A = 4\pi r^2$

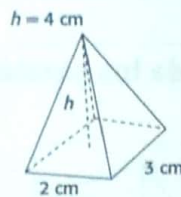
Calcula el volumen de los siguientes sólidos, así como la superficie y el volumen de las esferas.

Pirámide de base cuadrada

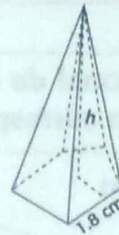


$$\begin{aligned} Ab &= 2^2 \\ Ab &= (2 \text{ cm})^2 \\ Ab &= 4 \text{ cm}^2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} V &= \frac{Abh}{3} \\ V &= \frac{(4 \text{ cm}^2)(3 \text{ cm})}{3} \\ V &= 12 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

a) Pirámide de base rectangular

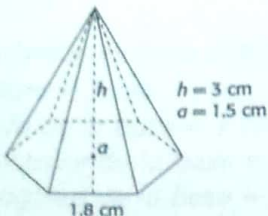


b) Pirámide de base pentagonal

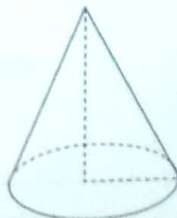


$h = 4 \text{ cm}$
 a = apotema
 $a = 1.3 \text{ cm}$

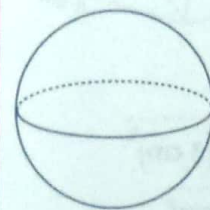
c) Pirámide de base hexagonal



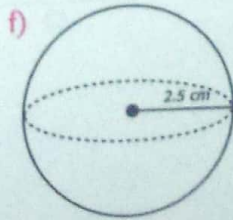
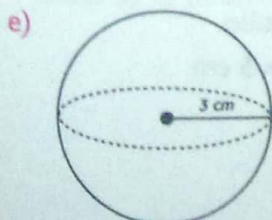
d) Cono



$h = 4 \text{ cm}$
 $r = 2 \text{ cm}$



$$\begin{aligned} A &= 4r^2 \\ A &= 4(3.1416)(2 \text{ cm})^2 \\ A &= 4(3.1416)(4 \text{ cm}^2) \\ A &= 50.2656 \text{ cm}^2 \\ V &= \frac{Ar}{3} \\ V &= \frac{(50.2656 \text{ cm}^2)(2 \text{ cm})}{3} \\ V &= \frac{100.5312 \text{ cm}^3}{3} \\ V &= 33.5104 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$



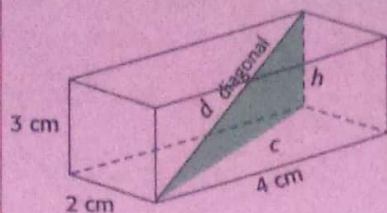
Geometría

LECCIÓN

4

Cálculo de longitudes de sólidos

Paralelepípedo



$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

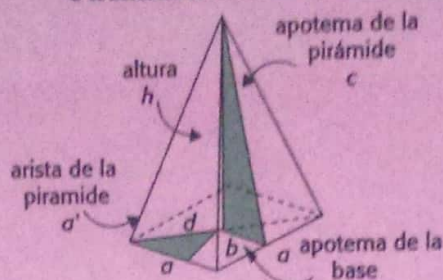
$$d = \sqrt{c^2 + h^2}$$

$$d = \sqrt{(a^2 + b^2) + h^2}$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$$

$$\text{cubo} \begin{cases} d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} \\ d = \sqrt{3a^2} \\ d = a\sqrt{3} \end{cases}$$

Pirámide de base cuadrada



$$c = \sqrt{b^2 + h^2}$$

$$c = \sqrt{\frac{(a')^2}{2} + h^2}$$

$$c = \sqrt{\frac{a'^2}{2} + h^2}$$

$$c = \sqrt{\frac{a'^2 + 4h^2}{4}}$$

$$c = \sqrt{\frac{a'^2 + 4h^2}{4}}$$

$$d = \sqrt{\frac{(a')^2}{2} + \frac{(a')^2}{2}}$$

$$d = \sqrt{\frac{a'^2}{4} + \frac{a'^2}{4}}$$

$$d = \sqrt{\frac{2a'^2}{4}}$$

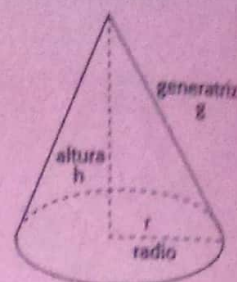
$$d = \sqrt{\frac{a'^2}{2}}$$

$$a' = \sqrt{d^2 + h^2}$$

$$a' = \sqrt{\frac{a'^2}{2} + h^2}$$

$$d = \sqrt{\frac{a'^2 + 2h^2}{2}}$$

Cono



$$g = \sqrt{r^2 + h^2}$$

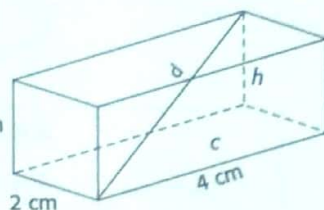
Calcula la diagonal de cada uno de los paralelepípedos cuyas medidas se indican. Dibuja la figura correspondiente.

Paralelepípedo

ancho = 2 cm

largo = 4 cm

altura = 3 cm



$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$$

$$d = \sqrt{(2 \text{ cm})^2 + (4 \text{ cm})^2 + (3 \text{ cm})^2}$$

$$d = \sqrt{4 \text{ cm}^2 + 16 \text{ cm}^2 + 9 \text{ cm}^2}$$

$$d = \sqrt{29 \text{ cm}^2}$$

$$d = 5.38 \text{ cm}$$

a) Paralelepípedo

ancho = 3 cm

largo = 3 cm

altura = 4 cm

b) Paralelepípedo

ancho = 2 cm

largo = 4 cm

altura = 5 cm

c)

Cubo

lado = 3 cm

Cálculo de longitudes de sólidos (continuación)

Pirámide de base cuadrada.

altura = 4 cm
 lado de la base = 2 cm
 apotema de la base = _____
 apotema de la pirámide = _____
 diagonal de la base = _____
 arista de la pirámide = _____

$$c = \sqrt{\frac{(2 \text{ cm})^2 + 4(4 \text{ cm})^2}{2}}$$

$$c = \sqrt{\frac{4 \text{ cm}^2 + 4(16 \text{ cm}^2)}{2}}$$

$$c = \sqrt{\frac{4 \text{ cm}^2 + 64 \text{ cm}^2}{2}}$$

$$c = \sqrt{\frac{68 \text{ cm}^2}{2}}$$

$$c = \frac{8.24 \text{ cm}}{2}$$

$$c = 4.12 \text{ cm}$$

$$d = \sqrt{\frac{a^2}{2}}$$

$$d = \sqrt{\frac{(2 \text{ cm})^2}{2}}$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \text{ cm}^2}{2}}$$

$$d = \sqrt{2 \text{ cm}^2}$$

$$d = 1.41 \text{ cm}$$

$$a' = \sqrt{\frac{a^2 + 2h^2}{2}}$$

$$a' = \sqrt{\frac{(2 \text{ cm})^2 + 2(4 \text{ cm})^2}{2}}$$

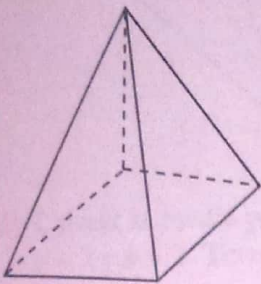
$$a' = \sqrt{\frac{4 \text{ cm}^2 + 2(16 \text{ cm}^2)}{2}}$$

$$a' = \sqrt{\frac{4 \text{ cm}^2 + 32 \text{ cm}^2}{2}}$$

$$a' = \sqrt{\frac{36 \text{ cm}^2}{2}}$$

$$a' = \sqrt{18 \text{ cm}^2}$$

$$a' = 4.24 \text{ cm}$$



$$b = \frac{a}{2}$$

$$b = \frac{2 \text{ cm}}{2}$$

$$b = 1 \text{ cm}$$

$$c = \sqrt{\frac{a^2 + 4h^2}{2}}$$

Calcula las longitudes indicadas en cada pirámide de base cuadrada. Dibuja la figura correspondiente.

a) Pirámide de base cuadrada

altura = 3 cm

lado de la base = 3 cm

apotema de la base = _____

diagonal de la base = _____

apotema de la pirámide = _____

arista de la pirámide = _____

b) Pirámide de base cuadrada

altura = 5 cm

lado de la base = 1 cm

apotema de la base = _____

diagonal de la base = _____

apotema de la pirámide = _____

arista de la pirámide = _____

LECCIÓN

1

Geometría

Cálculo de longitudes de sólidos (continuación)

Calcula la longitud indicada en cada cono. Dibuja la figura correspondiente.

Cono

altura = 2 cm

radio = 1 cm

generatriz = _____

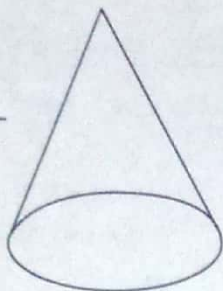
$$g = \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$g = \sqrt{(1 \text{ cm})^2 + (2 \text{ cm})^2}$$

$$g = \sqrt{1 \text{ cm}^2 + 4 \text{ cm}^2}$$

$$g = \sqrt{5 \text{ cm}^2}$$

$$g = 2.23 \text{ cm}$$



a) Cono

altura = 3 cm

generatriz = 3.2 cm

radio = _____

b) Cono

altura = 4 cm

radio = 1.5 cm

generatriz = _____

a) Cono

altura = 4 cm

generatriz = 4.5 cm

radio = _____

a) Cono

generatriz = 5 cm

radio 2 cm

altura = _____

a) Cono

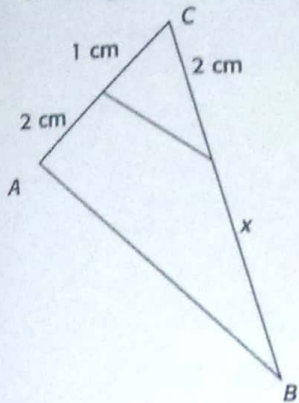
generatriz = 3 cm

radio 2 cm

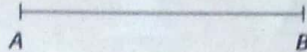
altura = _____

I. Traza y/o calcula lo que se te indica.

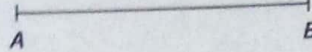
- a) Encuentra el valor de x en el siguiente triángulo.



- b) Divide el segmento en cuatro partes iguales.



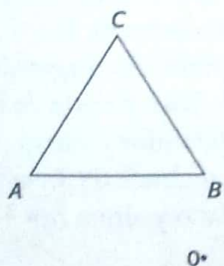
- c) Divide el segmento en la razón $r = \frac{1}{4}$



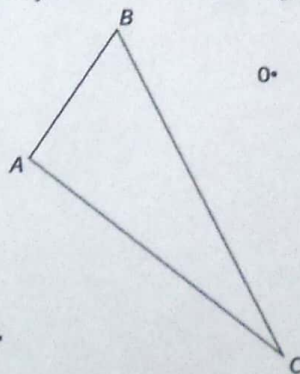
- d) Calcula la media proporcional de $a = 2$ y $b = 3$. Traza el diagrama.

- e) Calcula la cuarta proporcional de $a = 1$, $b = 2$ y $c = 4$. Traza el diagrama.

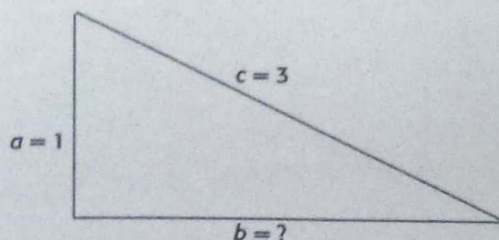
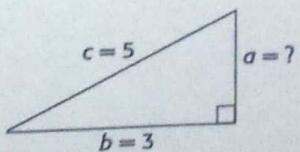
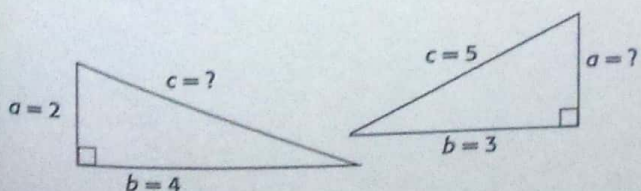
- f) Traza la figura simétrica al triángulo ABC en el punto O en la razón 1: -1



- g) Traza la figura simétrica al triángulo ABC en el punto O en la razón 1:2. Calcula la cuarta proporcional de $a = 1$, $b = 2$ y $c = 4$. Traza el diagrama.



II. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos.



III. Traza las siguientes figuras geométricas y calcula sus volúmenes.

a) Cubo de 2.5 cm por lado.

b) Paralelepípedo recto de 1.5 cm x 2.5 cm x 2.5 cm.

c) Pirámide de base cuadrada de 2 cm x 2 cm x 4 cm

d) Cono de 2 cm de diámetro y 3 cm de altura.

IV. Calcula lo que se te indica.

a) Superficie y volumen de la esfera de radio $r = 2$ cm

b) Generatriz del cono de altura $h = 4$ cm y radio $r = 1$ cm

c) Apotema de la base, apotema de la pirámide, diagonal de la base y arista de la pirámide de base cuadrada de 3 cm por lado y altura $h = 4$ cm

BLOQUE IV

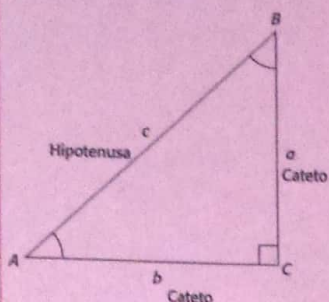
Trigonometría

LECCIÓN

1

Trigonometría

Razones trigonométricas de un ángulo agudo



$$\text{Seno} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{Coseno} = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{Tangente} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$$

$$\text{Cotangente} = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Cateto opuesto}} = \frac{1}{\text{Tangente}}$$

$$\text{Secante} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente}} = \frac{1}{\text{Coseno}}$$

$$\text{Cosecante} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto}} = \frac{1}{\text{Seno}}$$

ángulo A

$$\text{Sen } A = \frac{a}{c}$$

$$\text{Cos } A = \frac{b}{c}$$

$$\text{Tan } A = \frac{a}{b}$$

$$\text{Cot } A = \frac{b}{a}$$

$$\text{Csc } A = \frac{c}{a}$$

ángulo B

$$\text{Sen } B = \frac{b}{c}$$

$$\text{Cos } B = \frac{a}{c}$$

$$\text{Tan } B = \frac{b}{a}$$

$$\text{Cot } B = \frac{a}{b}$$

$$\text{Sec } B = \frac{c}{a}$$

$$\text{Csc } B = \frac{c}{b}$$

Catetos: Lados que forman el ángulo recto

Cateto opuesto: Lado opuesto al ángulo de referencia

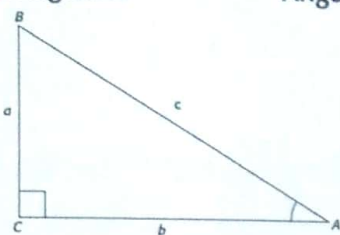
Cateto adyacente: Lado junto al ángulo de referencia

Hipotenusa: Lado opuesto al ángulo recto

Escribe las razones trigonométricas en cada triángulo para los ángulos indicados.

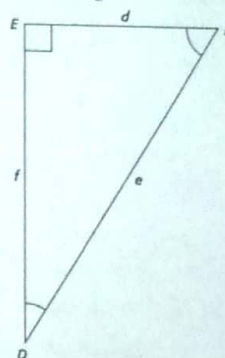
a) Ángulo A

Ángulo B



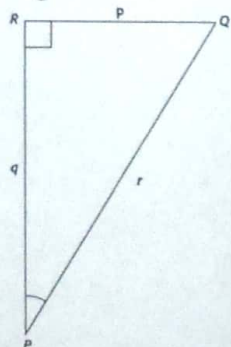
d) Ángulo D

Ángulo F



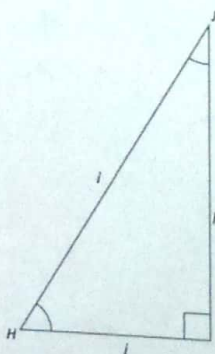
b) Ángulo P

Ángulo Q



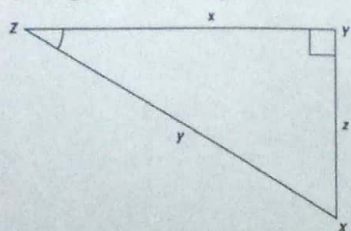
e) Ángulo H

Ángulo J



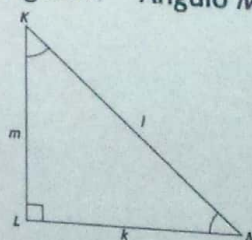
c) Ángulo X

Ángulo Z



f) Ángulo K

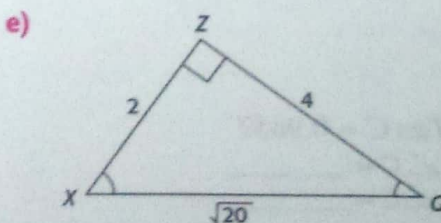
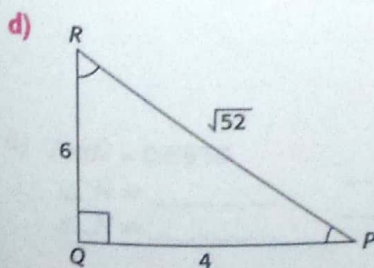
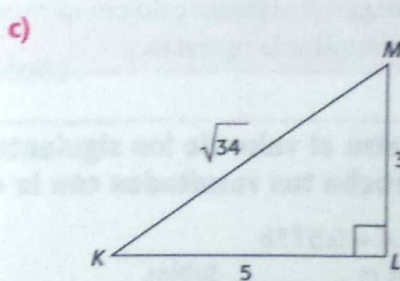
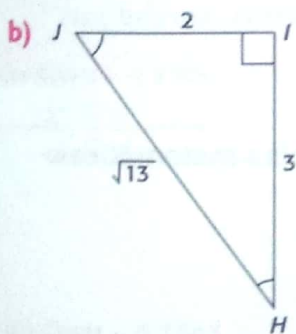
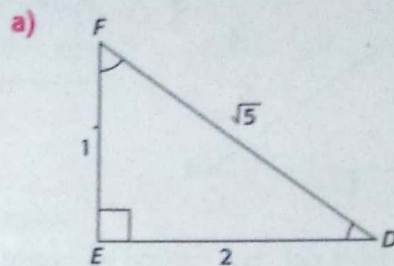
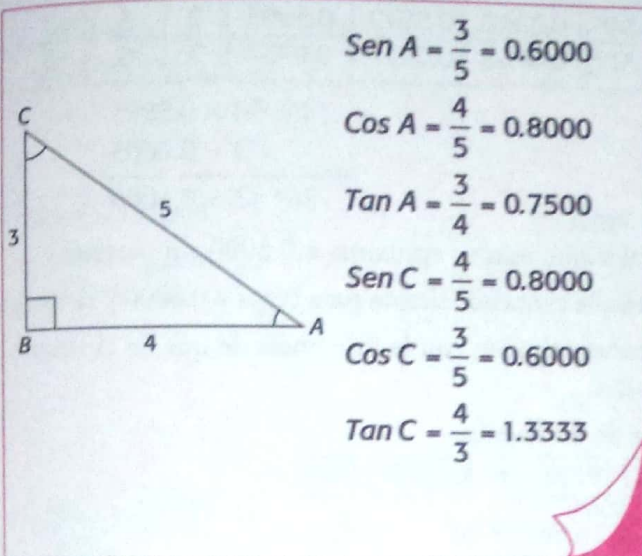
Ángulo M



Temas relacionados: Triángulos rectángulos

Razones trigonométricas de un ángulo agudo (continuación)

Calcula el valor de las razones trigonométricas del seno, coseno y tangente en cada uno de los siguientes triángulos rectángulos. Expresa valores hasta cuatro decimales.



LECCIÓN

1

Trigonometría

LECCIÓN

2

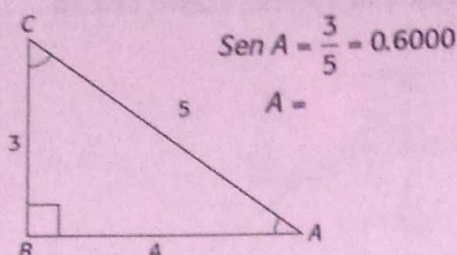
Trigonometría

Valores del seno, coseno y tangente para los ángulos agudos

• Uso de tablas para conocer el valor de un ángulo.

tabla del seno natural

N	30'	40'	50'	1'	2'	3'
35°	0.5807	0.5831	0.5854	2	5	7
36°	0.5948	0.5972	0.5995	2	5	7
37°	0.6088	0.6111	0.6134	2	5	7



$$\begin{aligned} 36^\circ 50' &= 0.5995 \\ + \quad 2' &= 0.0005 \\ \hline 36^\circ 52' &= 0.6000 \end{aligned}$$

1. En la tabla del seno natural ubicamos el valor que más se aproxime a 0.6000 sin pasarse.
2. En el aparato de partes proporcionales se busca la cantidad faltante para llegar a 0.6000 y se agrega.
3. Para el coseno y la tangente se sigue un proceso similar, con la diferencia de que en el coseno los minutos de la parte proporcional se restan.

• Uso de la calculadora para conocer el valor de un ángulo.

1. En la calculadora se presionan las teclas $\boxed{.} \boxed{6} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{\text{INV}} \boxed{\sin} =$
2. En la pantalla aparece la cantidad en grados 36.86989765
3. Para conocer los minutos, se presionan las teclas $\boxed{\text{INV}} \boxed{^\circ, ''}$
4. En pantalla aparece la cantidad en grados, minutos y segundos $36^\circ 52' 11.63''$
5. En algunas de las calculadoras la tecla $\boxed{\text{INV}}$ cambia por $\boxed{\text{SHIFT}}, \boxed{\text{F}}, \boxed{2\text{nd}}$ o $\boxed{\text{Sin}^{-1}}$
6. En otras calculadoras primero es necesario marcar $\boxed{\text{INV}} \boxed{\text{SIN}}$ y después la cantidad para poder realizar la operación.

Encuentra el valor de los siguientes ángulos utilizando las tablas matemáticas. Comprueba tus resultados con la calculadora.

a) $\text{Sen } A = 0.5736$

$\angle A = \underline{\hspace{2cm}}$ tablas
 $\angle A = \underline{\hspace{2cm}}$ Calculadora

b) $\text{Cos } B = 0.9455$

$\angle B = \underline{\hspace{2cm}}$
 $\angle B = \underline{\hspace{2cm}}$

c) $\text{Tan } C = 0.9657$

$\angle C = \underline{\hspace{2cm}}$
 $\angle C = \underline{\hspace{2cm}}$

d) $\text{Tan } I = 0.2110$

$\angle I = \underline{\hspace{2cm}}$
 $\angle I = \underline{\hspace{2cm}}$

Valores del seno, coseno y tangente para los ángulos agudos (cont.)

Encuentra el valor de los siguientes ángulos utilizando las tablas matemáticas. Comprueba tus respuestas con la calculadora.

e) $\text{Sen } D = 0.9853$

$\angle D = \underline{\hspace{2cm}}$
 $\angle D = \underline{\hspace{2cm}}$

f) $\text{Sen } J = 0.6788$

$\angle J = \underline{\hspace{2cm}}$
 $\angle J = \underline{\hspace{2cm}}$

g) $\text{Cos } E = 0.2504$

$\angle E = \underline{\hspace{2cm}}$
 $\angle E = \underline{\hspace{2cm}}$

h) $\text{Cos } K = 0.9237$

$\angle K = \underline{\hspace{2cm}}$
 $\angle K = \underline{\hspace{2cm}}$

i) $\text{Tan } F = 1.767$

$\angle F = \underline{\hspace{2cm}}$
 $\angle F = \underline{\hspace{2cm}}$

j) $\text{Tan } L = 20428$

$\angle L = \underline{\hspace{2cm}}$
 $\angle L = \underline{\hspace{2cm}}$

k) $\text{Sen } G = 0.7794$

$\angle G = \underline{\hspace{2cm}}$
 $\angle G = \underline{\hspace{2cm}}$

l) $\text{Sen } M = 0.9903$

$\angle M = \underline{\hspace{2cm}}$
 $\angle M = \underline{\hspace{2cm}}$

m) $\text{Cos } H = 0.3343$

$\angle H = \underline{\hspace{2cm}}$
 $\angle H = \underline{\hspace{2cm}}$

n) $\text{Cos } N = 0.5541$

$\angle N = \underline{\hspace{2cm}}$
 $\angle N = \underline{\hspace{2cm}}$

ñ) $\text{Tan } \hat{N} = 0.6950$

$\angle \hat{N} = \underline{\hspace{2cm}}$
 $\angle \hat{N} = \underline{\hspace{2cm}}$

LECCIÓN

2

Trigonometría

LECCIÓN

5

Trigonometría

Valores del seno, coseno y tangente para los ángulos agudos (cont.)

- Uso de tablas para conocer los valores del seno, coseno y tangente de un ángulo.

$$\text{Sen } 30^\circ 20' = 0.5050$$

N	10'	70'	30'
29°	0.4874	0.4899	0.4984
30°	0.5025	0.5050	0.5075
31°	0.5175	0.5200	0.5225

1. En la tabla del seno natural ubicamos el ángulo de 30° en la columna de $20'$.

2. Para el coseno y la tangente se sigue un proceso similar.

- Uso de la calculadora para conocer los valores del seno, coseno y tangente de un ángulo.

1. En la calculadora se presiona las teclas $\boxed{3} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{.} \boxed{0} \boxed{5} \boxed{0} \boxed{SIN} \boxed{=}$

2. En la pantalla aparece la cantidad 0.505029841

3. En algunas calculadoras primero es necesario marcar SIN y después la cantidad para poder realizar la operación.

* Arquímedes Caballero, C. et al, *Tablas matemáticas*, pág. 12

Encuentra el valor del seno, coseno y tangente de los ángulos siguientes. Utiliza las tablas matemáticas y la calculadora; compara tus resultados.

- a) 30° tablas calculadora

$$\text{Sen } 30^\circ = \underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{Cos } 30^\circ = \underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{Tan } 30^\circ = \underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

- b) 17° tablas calculadora

$$\text{Sen } 17^\circ = \underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{Cos } 17^\circ = \underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{Tan } 17^\circ = \underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

- c) 45° tablas calculadora

$$\text{Sen } 45^\circ = \underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{Cos } 45^\circ = \underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{Tan } 45^\circ = \underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

- d) $32^\circ 20'$ tablas calculadora

$$\text{Sen } 32^\circ 20' = \underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{Cos } 32^\circ 20' = \underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{Tan } 32^\circ 20' = \underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

- e) 60° tablas calculadora

$$\text{Sen } 60^\circ = \underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{Cos } 60^\circ = \underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{Tan } 60^\circ = \underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

- f) $67^\circ 40'$ tablas calculadora

$$\text{Sen } 67^\circ 40' = \underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{Cos } 67^\circ 40' = \underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{Tan } 67^\circ 40' = \underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

- g) 75° tablas calculadora

$$\text{Sen } 75^\circ = \underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{Cos } 75^\circ = \underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{Tan } 75^\circ = \underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

- h) $44^\circ 37'$ tablas calculadora

$$\text{Sen } 44^\circ 37' = \underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{Cos } 44^\circ 37' = \underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{Tan } 44^\circ 37' = \underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

Temas relacionados: Razones trigonométricas
Ángulos

Resolución de triángulos rectángulos

LECCIÓN

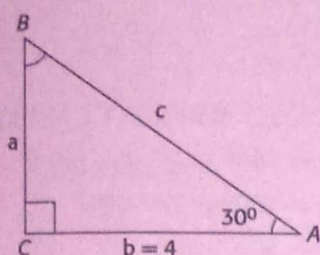
1

Dados un cateto y un ángulo agudo.

1. Se utiliza una razón trigonométrica que relacione al ángulo dado y al cateto conocido.

2. Con el teorema de Pitágoras se busca el valor del lado que falta.

3. Con las propiedades del triángulo se calcula el valor del ángulo que falta.



$$\cos A = \frac{b}{c}$$

$$\cos A = b$$

$$c = \frac{b}{\cos A}$$

$$c = \frac{4}{\cos 30^\circ}$$

$$c = \frac{4}{0.8660}$$

$$c = 4.6189$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$a = \sqrt{(4.6189)^2 - (4)^2}$$

$$a = \sqrt{21.3342 - 16}$$

$$a = \sqrt{5.3342}$$

$$a = 2.3095$$

$$\cancel{A} + \cancel{B} + \cancel{C} = 180^\circ$$

$$\cancel{B} = 180^\circ - \cancel{A} - \cancel{C}$$

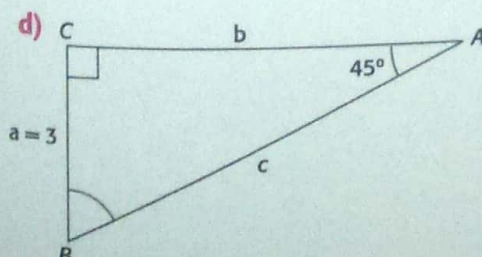
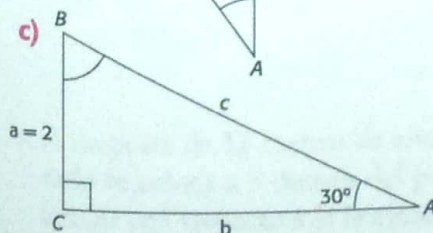
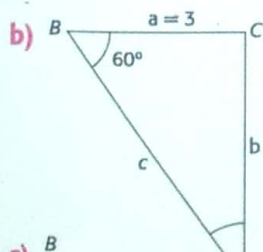
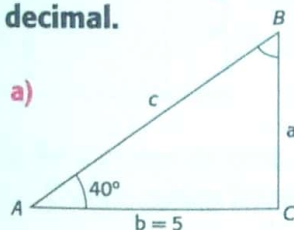
$$\cancel{B} = 180^\circ - 30^\circ - 90^\circ$$

$$\cancel{B} = 60^\circ$$

También se pudo escoger la tangente para calcular a y posteriormente, con el teorema de Pitágoras, calcular C .

* Arquímedes Caballero, C. et al, *Tablas matemáticas*, pág. 12

Resuelve los siguientes triángulos rectángulos. Utiliza cantidades hasta el cuarto decimal.



Temas relacionados: Razones trigonométricas, Raíz cuadrada
Propiedades de triángulos

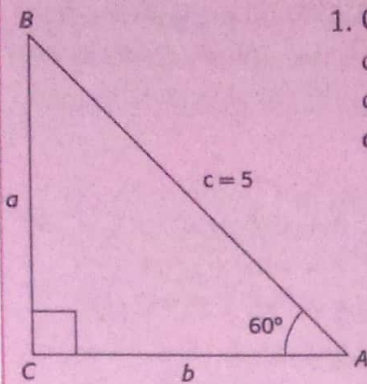
Trigonometría

LECCIÓN

1

Resolución de triángulos rectángulos (continuación)

Dados la hipotenusa y un ángulo agudo.



1. Con el seno o el coseno podemos calcular el valor de a o b .

$$\text{Sen } A = \frac{a}{c}$$

$$C\text{Sen } A = a$$

$$(5) \text{ Sen } 60^\circ = a$$

$$(5) (0.8990) = a$$

$$4.33 = a$$

2. Con el teorema de Pitágoras se calcula el lado faltante.

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{(5)^2 - (4.33)^2}$$

$$b = \sqrt{25 - 18.7489}$$

$$b = \sqrt{6.2511}$$

$$b = 2.0025$$

3. Con las propiedades del triángulo se calcula el ángulo que falta.

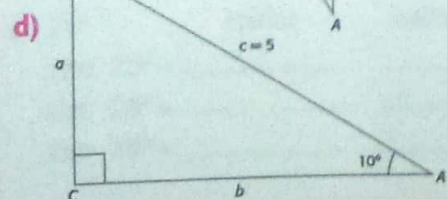
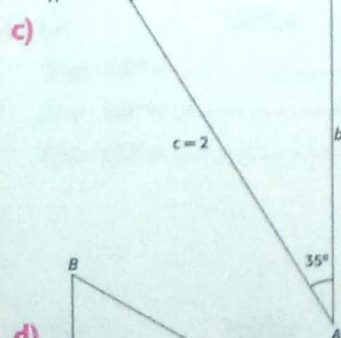
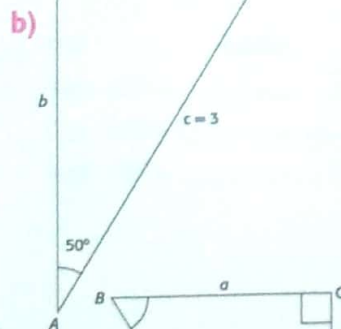
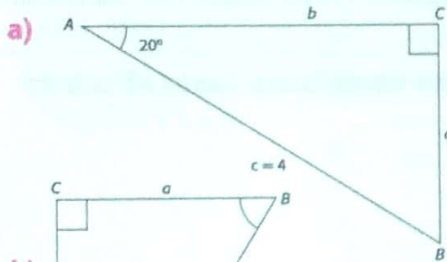
$$\cancel{A} + \cancel{B} + \cancel{C} = 180^\circ$$

$$\cancel{B} = 180^\circ - \cancel{A} - \cancel{C}$$

$$\cancel{B} = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ$$

$$\cancel{B} = 30^\circ$$

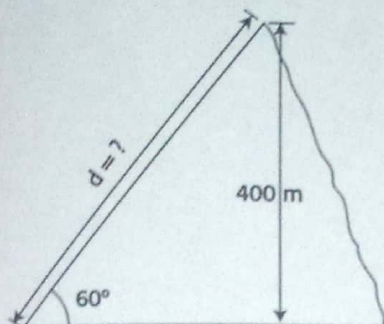
Resuelve los siguientes triángulos rectángulos. Utiliza cantidades hasta el cuarto decimal.



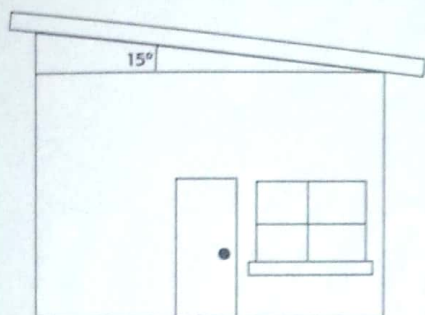
Temas relacionados: Operaciones con números
Operaciones con números naturales

Resolución de triángulos rectángulos (continuación)

1. Si un monte tiene una altura de 400 metros y una ladera con 60° de inclinación con respecto a la horizontal, ¿cuántos metros caminará una persona para llegar a la cima?



2. Si una casa va a construirse con el techo inclinado a 15° con respecto a la horizontal, ¿qué tan alto debe estar una pared con respecto a la otra? La distancia entre paredes es de 4 metros.



3. En un juego de geometría, el lado de una escuadra está opuesto al ángulo de 60° y mide 30 cm. ¿Cuánto miden los otros dos lados de la escuadra?

4. A un poste de 12 metros de altura se le va a reforzar un cable de acero. Si el gancho para sujetarlo se coloca a 5 metros del poste, ¿cuánto mide el cable de acero? ¿qué inclinación tiene en grados con respecto a la horizontal?

LECCIÓN

1

Trigonometría

LECCIÓN

1

Trigonometría

Resolución de triángulos rectángulos (continuación)

1. Calcula la longitud del apotema de un pentágono cuyos lados miden 1 cm.
2. Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo que mide 6 cm por 4 cm. ¿Qué ángulo tiene con respecto al lado de 6 cm?
3. Calcula la longitud de los lados de un hexágono si la apotema mide 1.5 cm.
4. ¿Cuál será el valor del ángulo generador de un cono si su altura es de 5 cm y el radio es de 2.5 cm? ¿Cuál es la longitud de su generatriz?

Temas relacionados: Polígonos, Sólidos
Teorema de Pitágoras, Razones trigonométricas

BLOQUE V

Presentación y tratamiento de la información

LECCIÓN

1

Presentación y tratamiento de la información

Tasas

Si la tasa de interés bancaria durante un mes fue de 1%, ¿cuánto dinero recibirá una persona si en su cuenta de ahorros tiene \$200.00? ¿Cuánto dinero tendrá en total?

i = interés (incremento)

C_1 = Cantidad inicial

C_2 = Cantidad final

P = porcentaje

$$= C_1 \times \frac{P}{100} = (200) \left(\frac{1}{100} \right) = (200)(0.01) = \$2$$

$$C_2 = C_1 + \quad = 200 + 2 = \$202$$

$$C_2 = C_1 + C_1 \times \frac{P}{100}$$

$$C_2 = C_1 \left(1 + \frac{P}{100} \right)$$

Si la cantidad de alumnos en una escuela secundaria fue de 480 alumnos el ciclo escolar pasado, y en el presente ciclo es de 520 alumnos, ¿qué porcentaje incrementó la población estudiantil?

$$P = \frac{C_2 - C_1}{C_1} \times 100 = \frac{520 - 480}{480} \times 100 = \frac{40}{480} \times 100 = (0.0833)(100) = 8.33\%$$

1. El número de automóviles en una ciudad aumentó 5%. Si había 20 000 automóviles, ¿cuántos hay en la actualidad en esa ciudad?
2. La población de la República Mexicana se incrementó 2.5% durante el año pasado. Si éramos 95 millones de mexicanos, ¿cuántos somos ahora?
3. Si un obrero gana \$3 500.00 al mes y antes ganaba \$3 000.00 mensuales, ¿en qué porcentaje se incrementó su salario?
4. En su visita anual al médico, Jorge mide su estatura. Si el año pasado medía 1.60 m y este año mide 1.65 m, ¿cuánto aumentó su estatura en porcentaje?

Crecimiento exponencial

Crecimiento exponencial o geométrico

Si una persona ahorra \$4,000.00 a una tasa de interés anual del 11% y los intereses obtenidos se reinvierten, ¿cuánto tendrá ahorrado dentro de un año? ¿Cuánto tendrá ahorrado dentro de dos, tres y cuatro años? Construye una gráfica con estos datos

$$C_2 = C_1 \left(1 + \frac{P}{100}\right)^n \quad \text{a) } C_2 = 4\,000 \left(1 + \frac{11}{100}\right)^1 = 4\,000(1 + 0.11) = 4\,000(1.11) = 4\,440$$

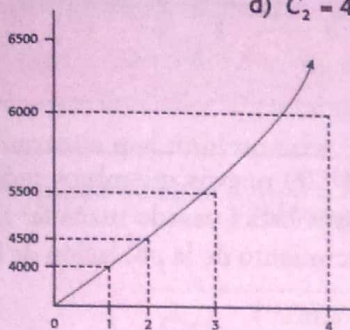
C_1 = Cantidad inicial

$$C_2 = \text{Cantidad final} \quad \text{b) } C_2 = 4\,000 \left(1 + \frac{11}{100}\right)^2 = 4\,000(1.11)^2 = 4\,000(1.2321) = 4\,928.40$$

P = porcentaje

$$n = \text{número de periodo de tiempo} \quad \text{c) } C_2 = 4\,000 \left(1 + \frac{11}{100}\right)^3 = 4\,000(1.11)^3 = 4\,000(1.367631) = 5\,470.52$$

$$\text{d) } C_2 = 4\,000 \left(1 + \frac{11}{100}\right)^4 = 4\,000(1.11)^4 = 4\,000(1.518070) = 6\,072.28$$



1. Para una inversión de \$12 000.00 a una tasa de interés anual fija del 12.5% con reinversión de intereses, calcula el monto de la inversión con un año, dos años, tres años, cuatro años y cinco años. Grafica los datos.
2. Al depositar \$20 000.00 una inversión a tasa de interés anual fija de 10%, calcula la cantidad de dinero que habrá en la inversión dentro de uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis años. Construye una gráfica para representar los datos.
3. El número de pobladores de una ciudad se incrementa en 1.25% anualmente. Si la población actual es de 30 000 habitantes, calcula cuántos habitantes habrá en el próximo año, y dentro de 2, 3, 4 y 5 años. Haz una gráfica con los valores obtenidos.

LECCIÓN

2

Presentación y tratamiento de la información

LECCIÓN

3

Presentación y tratamiento de la información

Crecimiento aritmético

Crecimiento aritmético o lineal.

Si un vehículo se mueve a una velocidad constante de 60 km/h, ¿cuánto habrá avanzado en 1 hora? ¿Y en dos? ¿Cuánto habrá avanzado en 3, 4 y 5 horas? Construye una gráfica con estos datos.

i = incremento

n = Número de periodos

$$C_2 = C_1 + ni$$

C_1 = Cantidad inicial

C_2 = Cantidad final

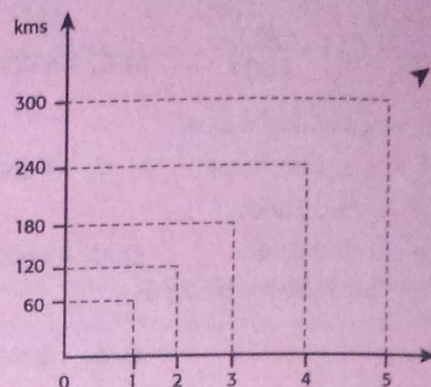
$$a) C_2 = C_1 + ni = 0 + 1(60) = 0 + 60 = 60 \text{ km}$$

$$b) C_2 = C_1 + ni = 0 + 2(60) = 0 + 120 = 120 \text{ km}$$

$$c) C_2 = C_1 + ni = 0 + 3(60) = 0 + 180 = 180 \text{ km}$$

$$C_2 = C_1 + ni = 0 + 4(60) = 0 + 240 = 240 \text{ km}$$

$$C_2 = C_1 + ni = 0 + 5(60) = 0 + 300 = 300 \text{ km}$$



1. Si la población de una colonia de insectos se incrementa en 1 000 nuevos miembros cada día, ¿cuántos insectos habrá mañana si hoy existen 200 000? ¿Cuántos habrá pasado mañana? ¿Dentro de tres días? Construye una gráfica donde representes el crecimiento de la población de la colonia.
2. Si Rogelio empieza a depositar \$10.00 semanalmente en su alcancía, ¿cuánto tendrá ahorrado la primera semana? ¿Cuánto tendrá ahorrado durante la segunda, tercera y cuarta semanas? Gráfica los datos.
3. El gobierno desea acabar con la falta de viviendas para los mexicanos. Si se elabora un programa para acabar en tres años con el problema construyendo 3 000 000 de casas, y si el ritmo de construcción de las casas debe ser constante, ¿cuántas casas deben construirse por año? Elabora una gráfica donde muestres la disminución del déficit de vivienda durante los tres años.

Medidas de tendencia central

Moda: Es el dato que aparece con mayor frecuencia.

Media: Es el promedio de todos los datos.

Mediana: Divide un conjunto ordenado de datos en dos grupos iguales; la mitad de los datos tendrán valores que la mediana y la otra mitad tendrá valores mayores que la mediana. Si el número de datos es impar, la mediana es el valor intermedio; si el número de datos es par, la mediana es el promedio de los dos valores intermedios.

El siguiente conjunto de datos corresponde a las faltas de 40 alumnos del tercer grado de secundaria durante todo el ciclo escolar pasado.

1, 8, 7, 15, 20, 2, 7, 9, 12, 18, 2, 3, 21, 17, 15, 14, 13, 12, 12, 18, 19, 16, 16, 16, 17, 0, 8, 9, 11, 12, 11, 12, 21, 22, 6, 6, 10, 3, 14

Construye la distribución de frecuencia y calcula los valores de tendencia central.

1. Rango = dato mayor - dato menor = $22 - 0 = 22$
2. Número de clases = $\sqrt{\text{total de datos}} = \sqrt{40} = 6.32$, se ajusta a 6 clases.
Recuerda que mínimo debe haber 5 clases.
3. Amplitud de clase = $\frac{\text{Rango}}{\text{Número de clases}} = \frac{22}{6} = 3.66$, se ajusta a 4 la amplitud de

Clase	Marca de clase x_i	Frecuencia f	$f \cdot x_i$	Frecuencia acumulada
0-3	1.5	7	10.5	7
4-7	5.5	4	22	11
8-11	9.5	7	66.5	18
12-15	13.5	10	35	28
16-19	17.5	8	140	36
20-23	21.5	4	86	40
		40	460	

a) Moda = 12 (el dato que más se repite)

b) Media $\bar{x} = \frac{f \cdot x_i}{n} = \frac{460}{40} = 11.5$

c) Posición de la mediana = $\frac{\text{Número par de datos} + 1}{2} = \frac{40 + 1}{2} = \frac{41}{2} = 20.5$

La mediana está en el intervalo de 8 a 11, en el cual los datos son: 8, 8, 9, 9, 10, 11, 11; por lo tanto, la mediana $\mu = 9$

LECCIÓN

1

Presentación y tratamiento de la información

LECCIÓN

1

Presentación y tratamiento de la información

Medidas de tendencia central (continuación)

Encuentra la moda, la media y la mediana para los siguientes conjuntos de datos.

a) Edades de 20 niños y jóvenes vecinos de la misma colonia.

5, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 13, 14, 14, 14, 15, 17, 17, 18, 19, 19, 20, 23, 24

Medidas de tendencia central (continuación)

Encuentra la moda, la media y la mediana para los siguientes datos.

- a) Calificaciones finales en matemáticas de un grupo de 56 alumnos del segundo grado de secundaria. (Recomendación: 6 intervalos con una amplitud de 0.9)

5.2, 5.3, 5.4, 5.6, 5.7, 5.8, 6.1, 6.1, 6.4, 6.6, 6.7, 6.7, 6.8, 6.8, 6.9, 6.9, 7.0, 7.4, 7.4, 7.4, 7.5, 7.5, 7.6, 7.7, 7.7, 7.8, 7.8, 7.8, 7.8, 8.0, 8.1, 8.1, 8.2, 8.2, 8.3, 8.5, 8.7, 8.8, 8.9, 9.2, 9.4, 9.4, 9.5, 9.5, 9.6, 9.6, 9.7, 9.8, 9.9, 9.9, 10.0, 10.0, 10.0, 10.0, 10.0, 10.0.

LECCIÓN

1

Presentación y tratamiento de la información

LECCIÓN

2

Medidas de dispersión

Rango: Diferencia entre el dato mayor y el dato menor.

Derivación media: Es la resta de un dato menor la media. $D = X_i - \bar{X}$

Derivación absoluta media: Desviación promedio de los datos con respecto a la media. Entre más pequeño es el número es la confiabilidad de los resultados.

$$DAM = \frac{\sum |X_i - \bar{X}|}{n}$$

En el ejemplo de la lección anterior, calcula la desviación media y la desviación absoluta media.

X_i	$X_i - \bar{X}$	$ X_i - \bar{X} $
1.5	-10	10
5.5	-6	6
9.5	-2	2
13.5	2	2
17.5	6	6
21.5	10	10
	0	36

(Siempre debe ser cero)

$$DAM = \frac{\sum |X_i - \bar{X}|}{n} = \frac{36}{40} = 0.9$$

- Es recomendable que el valor de la desviación absoluta media sea menor que 1.

En los siguientes ejercicios calcula la media, el rango, la desviación media y la desviación absoluta media.

a) 3, 2, 4, 8, 7, 6, 5, 9, 2, 7

$$\bar{X} = \frac{3+2+4+8+5+6+5+8+2+7}{10} = \frac{50}{10} = 5$$

$$R = 8 - 2 = 6$$

X_i	$X_i - \bar{X}$	$ X_i - \bar{X} $
2	-3	3
3	-2	2
4	-1	1
5	0	0
6	1	1
7	2	2
8	3	3
	0	12

$$DAM = \frac{\sum |X_i - \bar{X}|}{n} = \frac{12}{10} = 1.2$$

b) 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20

Medidas de dispersión (continuación)

Calcula la media, el rango, la desviación media y la desviación absoluta media de los siguientes datos.

c) 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20

d) 1, 5, 10, 15, 20, 25, 30

LECCIÓN**2***Presentación y tratamiento de la información*

LECCIÓN

2

Presentación y tratamiento de la información

Medidas de dispersión (continuación)

En los problemas de la lección anterior, calcula la desviación media y la desviación absoluta media.

a)

b)

c)

d)

Temas relacionados: Organización y presentación de datos
Distribución de frecuencias

Población y muestra

Población: Grupo o conjunto de personas o cosas. **Censo:** Estudio sobre toda la población.

Muestra: Una parte de la población.

Encuesta: Estudio de la muestra de población.

LECCIÓN

3

En cada uno de los siguientes casos, señala cuál es la población y cuál es la muestra.

- Habitantes de la República Mexicana _____
Habitantes de la ciudad de Monterrey _____
- Habitantes de una colonia _____
Habitantes de una ciudad _____
- Estudiantes de una escuela _____
Estudiantes de un grupo _____

En estadística se utiliza la frecuencia relativa para proyectar los resultados obtenidos de una muestra a toda la población.

EJERCICIO DE LA LECCIÓN 1:

f	Frecuencia relativa	Porcentaje
7	$\frac{7}{40} = 0.175$	17.5%
4	$\frac{4}{40} = 0.1$	10%
7	$\frac{7}{40} = 0.175$	17.5%
10	$\frac{10}{40} = 0.25$	25%
8	$\frac{8}{40} = 0.2$	20%
4	$\frac{4}{40} = 0.1$	10%

De estos resultados se podría inferir que en la escuela donde fue tomada la muestra, el 17.5% del alumnado llega a tener hasta tres faltas durante el ciclo escolar. Si la población estudiantil en la escuela es de 900 alumnos,

$$(\text{población}) \frac{(\text{porcentaje})}{100} = (900) \left(\frac{17.5}{100} \right) = 157.5 \approx 158$$

Significa que de los 900 alumnos, 158 llegarán a tener hasta tres faltas durante el ciclo escolar.

Población y muestra

Población: Grupo o conjunto de personas o cosas. **Censo:** Estudio sobre toda la población.

Muestra: Una parte de la población.

Encuesta: Estudio de la muestra de población.

LECCIÓN

3

En cada uno de los siguientes casos, señala cuál es la población y cuál es la muestra.

- Habitantes de la República Mexicana _____
Habitantes de la ciudad de Monterrey _____
- Habitantes de una colonia _____
Habitantes de una ciudad _____
- Estudiantes de una escuela _____
Estudiantes de un grupo _____

En estadística se utiliza la frecuencia relativa para proyectar los resultados obtenidos de una muestra a toda la población.

EJERCICIO DE LA LECCIÓN 1:

f	Frecuencia relativa	Porcentaje
7	$\frac{7}{40} = 0.175$	17.5%
4	$\frac{4}{40} = 0.1$	10%
7	$\frac{7}{40} = 0.175$	17.5%
10	$\frac{10}{40} = 0.25$	25%
8	$\frac{8}{40} = 0.2$	20%
4	$\frac{4}{40} = 0.1$	10%

De estos resultados se podría inferir que en la escuela donde fue tomada la muestra, el 17.5% del alumnado llega a tener hasta tres faltas durante el ciclo escolar. Si la población estudiantil en la escuela es de 900 alumnos,

$$(\text{población}) \frac{(\text{porcentaje})}{100} = (900) \left(\frac{17.5}{100} \right) = 157.5 \approx 158$$

Significa que de los 900 alumnos, 158 llegarán a tener hasta tres faltas durante el ciclo escolar.

LECCIÓN

3

Trigonometría

Población y muestra (continuación)

En los problemas de la lección 1, incluyendo el ejemplo, proyecta los resultados obtenidos de cada muestra a la población indicada en cada caso. No olvides calcular la frecuencia relativa.

1. Población estudiantil de la secundaria = 900 alumnos

2. Niños y jóvenes de toda la colonia = 200 niños y jóvenes

3. Población estudiantil de la secundaria = 600 alumnos

BLOQUE VI

Probabilidad

LECCIÓN

8

Probabilidad

Probabilidad

probabilidad frecuencial: $\frac{\text{número de veces que ocurre el evento deseado}}{\text{número total de eventos ocurridos}}$

probabilidad: $\frac{\text{número de eventos deseados}}{\text{número total de posibles resultados}}$ (fórmula clásica)

Calcular la probabilidad frecuencial de que al lanzar una moneda al aire 50 veces sea águila. Calcula también la probabilidad utilizando la fórmula clásica.

Probabilidad frecuencial

Número de veces que salió águila (A) = 28

Número de veces que salió sol (S) = 22

Número total de veces que se lanzó la moneda = 50

$$P(A) = \frac{28}{50} = \frac{14}{25}$$

$$P(S) = \frac{22}{50} = \frac{11}{25}$$

Fórmula clásica

Número de eventos deseados (águila) (A) = 1

Número de eventos deseados (sol) (S) = 1

Número total de posibles resultados = 2

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(S) = \frac{1}{2}$$

1. Calcular la probabilidad frecuencial de que al lanzar 60 veces un dado, la cara superior sea 1. Calcular también la probabilidad utilizando la fórmula clásica.
2. Calcular la probabilidad frecuencial de que les guste la leche a un grupo de 40 alumnos. Calcular también la probabilidad utilizando la fórmula clásica.
3. Calcular la probabilidad frecuencial de que salga un número par al lanzar 30 veces el dado. Calcular también la probabilidad utilizando la fórmula clásica.

Temas relacionados: Registro y tratamiento de los resultados de un mismo experimento aleatorio

Cálculos con probabilidades

Probabilidad de que un evento no ocurra.

$$P_{(B)} = 1 - P_{(A)}$$

Probabilidad de que ocurra uno u otro evento, pero no de manera simultánea.

$$P_{(A \text{ o } B)} = P_{(A)} + P_{(B)}$$

Probabilidad de que ocurra uno u otro evento incluso de manera simultánea.

$$P_{(A \text{ o } B)} = P_{(A)} + P_{(B)} - P_{(A \text{ y } B)}$$

LECCIÓN

2

Probabilidad

Calcula la probabilidad de que ocurran los siguientes eventos.

a) Salga un número par al lanzar el dado.

$$P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

b) Salga el número dos al lanzar el dado.

c) Salga el número 4 o 5 al lanzar el dado.

d) Al sacar una pelota de un conjunto de 5 pelotas negras y 3 rojas, ésta sea negra.

LECCIÓN

2

Probabilidad

Cálculos con probabilidades (continuación)

Calcula la probabilidad de los eventos.

- e) En un conjunto de 10 cartas, numeradas del 0 al 9, sacar la carta con el número 8.
- f) En un conjunto de 10 cartas, numeradas del 0 al 9, no sacar una carta con número par.
- g) En un conjunto de 5 pelotas negras y 4 rojas, no sacar una pelota negra.
- h) No sacar un número impar al lanzar el dado.

Cálculos con probabilidades (continuación)**Calcular la probabilidad de que ocurran los siguientes eventos.**

- a) Al tirar el dado, salga el número 5 o el número 3.

$$P = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- b) Al tirar el dado, salga el número 4 o el número 6.

- c) Al tirar el dado, salga un número par mayor que 4 o un número par menor que 4.

- d) Al tirar el dado, salga un número par o el número 4.

$$P = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

- e) En un conjunto de 10 barajas numeradas del 0 al 9, sacar una tarjeta con número impar o número mayor que 5.

- f) Al tirar el dado, salga un número menor que 5 o un número mayor que 2.

LECCIÓN

2

Probabilidad

LECCIÓN

2

Probabilidad

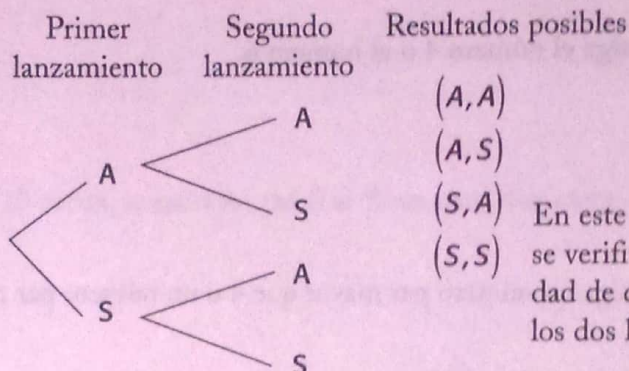
Cálculos con probabilidades (continuación)

Probabilidad de que ocurran dos eventos simultáneamente $P(A \text{ y } B) = P(A) \times P(B)$

Los diagramas de árbol nos permiten ordenar los resultados que se pueden obtener en un evento aleatorio.

Calcular la probabilidad de que al lanzar dos veces una moneda salga águila en los dos lanzamientos. Traza el diagrama de árbol correspondiente.

$$P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$



En este diagrama de árbol se verifica que la probabilidad de que salga águila en los dos lanzamientos es de $\frac{1}{4}$

Calcular la probabilidad de que ocurran los siguientes eventos. Traza el diagrama de árbol correspondiente.

a) Al lanzar un dado dos veces salga un número par en los dos lanzamientos.

b) Al lanzar un dado tres veces salga el número 3 en los tres lanzamientos.

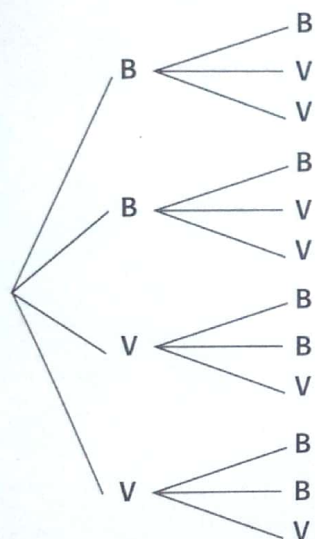
Cálculos con probabilidades (continuación)

Calcular la probabilidad de que ocurran los siguientes eventos. Traza el diagrama de árbol correspondiente.

Al sacar una pelota de un conjunto de dos pelotas blancas y dos verdes, ésta sea blanca. Al sacar una segunda pelota, ésta sea también blanca.

$$P = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Nota: Al sacar la primera pelota y no regresa-la, el conjunto queda con tres pelotas blancas y tres verdes; por eso cambia la probabilidad de $\frac{4}{7}$ a $\frac{3}{6}$



Si contamos los paréntesis (B, B) son 12 de los 42 que hay.

LECCIÓN

2

Probabilidad

LECCIÓN

2

Probabilidad

Cálculos con probabilidades (continuación)

Al sacar una pelota de un conjunto de dos pelotas amarillas, una blanca y una verde, ésta sea amarilla. Al sacar una segunda pelota, ésta sea blanca y, al sacar una tercera pelota, ésta sea verde.



Temas relacionados: Experiencias aleatorias y Fórmula clásica

Cálculos con probabilidades (continuación)

Al sacar una pelota de un conjunto de dos pelotas negras y una roja, ésta sea negra. Al regresar la pelota al conjunto y volver a sacar otra, ésta vuelva a ser negra.

LECCIÓN

2

Probabilidad

LECCIÓN

3

Probabilidad

Simulación

Simulación: Es sustituir un evento aleatorio por otro más sencillo y más fácil de realizar y repetir.
Prueba de Bernoulli: Evento aleatorio con dos resultados posibles = éxito y fracaso $p + q = 1$

1. El porcentaje de bateo de un beisbolista es de 0.310. Si tiene 20 oportunidades para batear, ¿qué probabilidad tiene de conectar de uno o más hits? ¿Qué probabilidad tiene de ser hecho out en la jugada?
2. En una bolsa se guardan dos canicas rojas y 3 blancas. ¿Cuál será la probabilidad de que se extraigan cero una o dos canicas rojas? ¿Qué probabilidad se tiene de sacar cero, una, dos o tres canicas blancas?

Temas relacionados: Experiencias aleatorias y Fórmula clásica

Simulación (continuación)

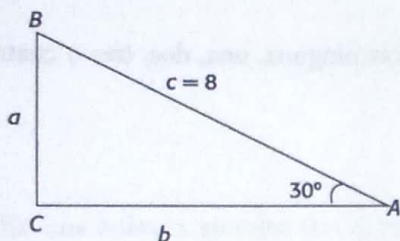
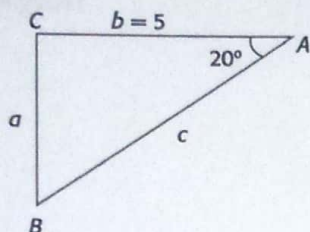
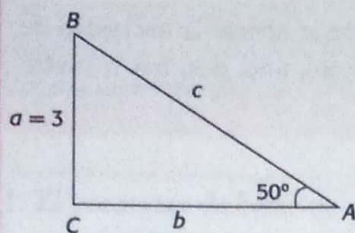
3. Un jugador de fútbol acierta 90% de sus tiros de penal. Si en un juego tuviese la necesidad de cobrar cuatro tiros de penal, ¿qué probabilidad hay de que anote cero, uno, dos, tres o cuatro goles?

4. Al lanzar 4 veces una moneda, qué probabilidad hay de sacar ninguna, una, dos, tres o cuatro ángulos?

LECCIÓN

3

Probabilidad

I. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos.**II. Resuelve y grafica.**

1. Luis gana mil pesos por semana. Si ahorra 10% de su salario semanal, calcula la cantidad que tendría ahorrada durante cada semana en los próximos dos meses. Elabora una gráfica con los datos obtenidos.
2. Se planea aumentar la producción mensual de una mina de cobre en un diez por ciento cada mes con respecto al mes inmediato anterior. Si la producción inicial de la mina es de 100 toneladas mensuales, calcula la producción de la mina durante los próximos doce meses. Elabora una gráfica con los datos obtenidos.

III. Se midieron las estaturas de un grupo de 40 jóvenes estudiantes del tercer grado de secundaria. Los datos obtenidos, en centímetros, fueron los siguientes:

168, 168, 169, 170, 170, 171, 172, 172, 173, 173, 173, 174, 174, 174, 174, 175, 175, 175, 176, 176, 176, 176, 176, 177, 177, 177, 177, 178, 178, 178, 178, 179, 179, 179, 180, 181, 181.

Completa el cuadro siguiente y calcula la moda, la media, la mediana, el rango, la desviación media y la desviación absoluta.

Clase	x_i	f	$f \cdot x_i$	$x_i - \bar{x}$	$ x_i - \bar{x} $	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada	Porcentaje
168 – 170									
171 – 173									
174 – 176									
177 – 179									
180 – 182									

Si la población estudiantil del tercer grado en esa secundaria es de 320 alumnos, contesta:

- ¿Cuántos alumnos probablemente midan 176 cm de altura? _____
- ¿Cuántos alumnos miden menos de 174 cm? _____
- Si se considera altos a los jóvenes cuya estatura es mayor que la media, ¿cuántos jóvenes altos hay en la escuela? _____

IV. Calcula.

- La probabilidad frecuencial de que salga un número menor que cuatro al lanzar veinte veces un dado. Calcula también la probabilidad utilizando la fórmula clásica.
- La probabilidad de que de un conjunto de cinco barajas numeradas del 1 al 5, no sacar una tarjeta con número par.
- La probabilidad de que de un conjunto de 10 barajas numeradas de 1 al 10, sacar una tarjeta con el número cinco o el número ocho.

BIBLIOGRAFÍA

BALDOR J., AURELIO. *Geometría plana y del espacio y trigonometría*, 15a. reimpresión, Publicaciones Cultural, México, 1998.

BALDOR, J., AURELIO. *Álgebra*, 16a. reimpresión, Publicaciones Cultural, México, 1998.

REES, PAUL K. Y SPARKS, FRED W. *Álgebra*, 4a. ed., 16a. reimpresión, Reverté Ediciones, México, 1998.

MURRAY R., SPIEGEL. *Estadística*, McGraw-Hill de México, México, 1979.

GARZA OLVERA, BENJAMÍN. *Geometría y trigonometría*, SEP, DGETI, SEIT, México, 1990.

GARZA OLVERA, BENJAMÍN. *Aritmética y álgebra*, SEP, DGETI, SEIT, México, 1990.

Esta obra se terminó de imprimir y encuadernar en julio de 2000
en Procesos Industriales de Papel, Av. 16 de Septiembre núm. 145
Col. Alce Blanco, Naucalpan, Edo. de México C.P. 53370.

La edición consta de 33 000 ejemplares

MATEMÁTICAS 3

CUADERNO de EJERCICIOS

José Eulalio Arreguín Pérez

Esta obra se divide en bloques, de acuerdo con el programa oficial de Matemáticas para el tercer grado de enseñanza secundaria: *Aritmética, Álgebra, Geometría, Trigonometría, Presentación y tratamiento de la información, y Probabilidad.*

Matemáticas, cuaderno de ejercicios 3 es una herramienta de gran utilidad que contribuye al mejor desempeño de los alumnos, tanto en la escuela como fuera de ella, proporcionándoles el material necesario para adquirir las habilidades necesarias en la solución de problemas y en la aplicación de los conocimientos en situaciones cotidianas.

Los ejercicios que se incluyen cumplen con la totalidad de los programas oficiales y su secuencia temática, aumentando su grado de dificultad de acuerdo con el desarrollo del tema.

Es importante destacar que los procedimientos planteados en este libro y los ejemplos resueltos en cada uno de los temas, así como las evaluaciones bimestrales, que tienen el propósito de repasar lo aprendido, son aportaciones de gran valor para maestros y alumnos.



ISBN: 970-22-0123-3



9 789702 201236